

1. Egy egyszerű feladat: síkidom háromszögek közé „szendvicselve”

Adott egy korlátos konvex síkidom, K , amely zárt, tehát a határoló görbét is tartalmazza. Vegyük az összes K által tartalmazott háromszöget. Belátható (ezt hidd el), hogy ezek között van (esetleg több) maximális területű, legyen S ilyen háromszög. Igazold, hogy ha S -et az s súlypontjából (-2) -szeresére nagyítjuk (tehát középpontosan tükrözzük s -re, majd vesszük a képét a 2 arányú, s középpontú hasonlóságnál), akkor az így kapott S' háromszög tartalmazza K -t. *Ne olvass tovább, a megoldás következik!*

Megoldás. Vegyünk egy S' -n kívüli \mathbf{p} pontot. Ekkor S' valamelyik oldalegyenese elválasztja \mathbf{p} -t S' -től. Jelölje \mathbf{a}'_1 és \mathbf{a}'_2 az S' háromszög ezen egyenesen fekvő két csúcsát, és \mathbf{a}_1 , illetve \mathbf{a}_2 az S háromszög megfelelő csúcsait. Könnyű látni, hogy az $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{p}$ háromszögnek nagyobb a területe, mint S -é (azonos alap, nagyobb magasság). Ezért S választásából adódóan \mathbf{p} nem lehet K pontja, amivel az állítást beláttuk. \square

Ennek a cikknek a célja, hogy kimondjuk és belássuk a fenti feladat d -dimenziós analogonját. Ehhez először röviden bevezetjük a d -dimenziós tér fogalmát, és geometriájának néhány alapelemét.

2. Magasabb dimenzió – Bevezetés

Hogy néz ki a kérdés a háromdimenziós térben? Hasonló érveléssel belátható, hogy ha egy korlátos konvex testben, amely zárt, tehát a határoló felületet is tartalmazza, veszünk egy legnagyobb térfogatú tetraédert, akkor annak a súlypontjából vett (-3) -szoros nagyítottja tartalmazza a testet. Ehhez két dolgot kell tudni. Egyrészt azt, hogy ha a tér egy pontja nincs a tetraéderben, akkor annak egyik lapsíkja a tetraédert a ponttól elválasztja. Másrészt azt, hogy a tetraéder térfogata egyenesen arányos az alapterület és a magasság szorzatával (az arányossági tényező $\frac{1}{3}$, de ez itt nem fontos).

Mi történik háromnál magasabb dimenzióban? Ehhez egy-két dolgot tisztázni kell, leginkább azt, hogy mit jelent a magasabb dimenzió. Erről részletesen írtunk a KöMaL 2018 szeptemberi számában [1]. Röviden a *d -dimenziós euklideszi geometria* felépítését így (is) lehet kezdeni: Vegyük a valós rendezett szám d -esek halmazát (d rögzített pozitív egész), tehát azt a halmazt, melynek elemei d koordinátából álló vektorok, (x_1, x_2, \dots, x_d) , ez geometriánk *ponthalmaza*, és \mathbb{R}^d -vel jelöljük. Egy ilyen vektort tudok szorozni valós számmal (minden koordinátát megszorozok vele), és megint egy vektort kapok, továbbá össze is tudok adni két ilyen vektort a szokott módon, koordinátánként. Tudom most definiálni két pont (tehát vektor) által meghatározott *szakaszt*. Az (x_1, \dots, x_d) és (y_1, \dots, y_d) pontok által meghatározott zárt szakasz az $(1 - \lambda)(x_1, \dots, x_d) + \lambda(y_1, \dots, y_d)$ pontok halmaza, ahol λ befutja a $[0, 1]$ valós intervallumot. Gondold meg (tényleg!), hogy $d = 2$, illetve 3 esetén valóban így kapom meg a szakasz pontjait. Most már könnyű definiálni \mathbb{R}^d *konvex halmazait*: azon ponthalmazok, amelyek tetszőleges két pontjukra az azok által meghatározott szakaszt is tartalmazzák.

A $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$ és $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$ pontok *távolságát* a sík- és térbeli esetek természetes általánosításaként a

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_d - q_d)^2}$$

képlettel definiáljuk.

Így, hogy távolságfogalmunk is van, definiálhatjuk a zárt halmazt. Egy \mathbb{R}^d -beli K halmazt *zártnak* hívunk, ha tartalmazza minden *torlódási pontját*, azaz minden olyan \mathbf{p} pontot, amelyhez tetszőleges $\varepsilon > 0$ távolságra van \mathbf{p} -től legfeljebb ε távol lévő K -beli pont. Gondold meg, hogy például a síkon egy körlemez a határoló körvonal nélkül nem zárt, azzal együtt viszont zárt halmaz.

3. Konvex burok, hipersík, szimplex

Mi a tetraéder d -dimenziós megfelelője? Ehhez érdemes megismerkedni a *konvex burok* és a *hipersík* fogalmával.

Feladat. \mathbb{R}^d -ben tetszőlegesen sok konvex halmaz metszete is konvex.

Rögzítsünk egy tetszőleges H ponthalmazt \mathbb{R}^d -ben. Vegyük az összes H -t tartalmazó konvex halmaz metszetét, jelöljük K -val. A fenti feladat szerint K konvex halmaz, amely tartalmazza H -t. Ráadásul K a legkisebb a H -t tartalmazó konvex halmazok között, tehát minden H -t tartalmazó konvex halmaz tartalmazza K -t is. Ezt a K -t hívjuk H *konvex burkának*. Például a síkon három nem egy egyenesre eső pont konvex burka az a háromszöglemez, amelynek csúcsai az adott három pont.

Hogyan lehet a konvex burok pontjait előállítani? Legyen H véges ponthalmaz, $H = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ (az alsó indexek itt nem koordinátákat jelölnek, hanem a vektorok számozását).

¹ A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kószámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Feladat. Lássuk be, hogy H konvex burka a

$$(1) \quad \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{p}_n$$

alakú pontok halmaza, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Azt kell tehát belátni, hogy az (1) alakú pontok halmaza tartalmazza H -t (ez könnyű), konvex, és tetszőleges K -t tartalmazó konvex halmaz tartalmaz minden (1) alakú pontot.

A síkon három pont lehet egy egyenesen, vagy nem, utóbbi esetben azt mondhatjuk, hogy *általános helyzetűek*. Ekkor a konvex burkuk egy háromszög. A térben négy pont eshet egy síkba, vagy nem, utóbbi esetben, megintcsak általános helyzetűnek mondjuk őket, és észrevehetjük, hogy konvex burkuk egy (nem feltétlen szabályos) tetraéder. Hogy megyünk tovább a dimenzióval?

Az \mathbb{R}^d térben *hipersíknak* nevezzük azon $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ pontok halmazát, amelyek kielégítik az

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_d x_d = \alpha_0$$

lineáris egyenletet valamely $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ számokra, ahol az $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ számok nem mindegyike nulla. Gondold meg, hogy a síkon minden egyenes ilyen alakú, a 3-dimenziós térben pedig minden sík ilyen alakú. Ha a fenti egyenletben az egyenlőségjelet \leq , illetve \geq jelre cseréljük, akkor az egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza a hipersík által határolt egyik, illetve másik *zárt féltér*.

Végre megválaszolhatjuk, mi a tetraéder d -dimenziós megfelelője. Ha $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{d+(x_1, \dots, x_d)_1}$ általános helyzetű pontok \mathbb{R}^d -ben, tehát nem tartalmazza őket hipersík, akkor ezen $d+1$ pont konvex burkát *szimplexnek* nevezzük.

3.1. Szimplex mint félterek metszete. Egy konvex ötszöget a síkon tekinthetünk úgy, mint az öt csúcának a konvex burka. De úgy is nézhetünk rá, mint az öt oldalegyenes által meghatározott zárt félsíkok metszete. Hasonlóan, egy kockát a térben megkapunk mint a 8 csúcának a konvex burka, de úgy is, hogy vesszük a 6 lapsíkját és az azok által meghatározott (megfelelő irányú) 6 féltér metszetét. Nem látjuk be, de nem meglepő a következő állítás.

1. állítás. *Legyenek $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{d+1}$ általános helyzetű pontok \mathbb{R}^d -ben. Tudjuk, hogy minden $i = 1, \dots, d+1$ indexre a $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{p}_i\}$ ponthalmaz egy hipersíkot határoz meg. Jelölje H_i az ezen hipersík által határolt azon zárt félteret, amely tartalmazza \mathbf{p}_i -t. Ekkor a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{d+1}$ pontok konvex burkaként kapott szimplex megegyezik a H_1, \dots, H_{d+1} félterek metszetével.*

4. Térfogat

Az utolsó fogalom, amellyel még adósak vagyunk, ha a cikk elején feltett kérdést d -dimenzióban is fel akarjuk tenni, d -dimenziós konvex halmaz térfogata.

Középiskolában azt mondják, hogy az a oldalhosszú négyzet területe a^2 , és minden konvex síkidomot „közelítünk” véges sok páronként nem átfedő (mondjuk tengely-párhuzamos) négyzet uniójával. Ahogy a közelítés egyre pontosabb, úgy tart a négyzetek összterülete egy számhoz. Ezt a számot hívjuk a konvex síkidom területének.

Ez egy jó felépítése a területnek, de azért tudni kell, hogy itt néhány lukat majd csak az egyetemen (pl. matematika szakon) fognak betönni: mit jelent az, hogy sok kis négyzet uniója közel van a síkidomhoz? Ahogy finomodik a közelítés, miért tart a négyzetek összterülete egy számhoz? Ez a munka szépen elvégezhető, de mi most ezt nem tesszük meg, mi is „hitelbe” dolgozunk: hidd el, kedves Olvasó, hogy egy d -dimenziós konvex testet ugyanígy lehet kis kockák uniójaként közelíteni, és ezen uniók térfogata, ahogyan a közelítés egyre pontosabb, tart egy számhoz, amelyet a konvex test *d -dimenziós térfogatának* hívunk.

4.1. Gúla térfogata. Legyen A az \mathbb{R}^d tér egy hipersíkjának egy konvex részhalmaza, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ pedig ezen hipersíkon kívül eső pont. Ekkor az $A \cup \{\mathbf{p}\}$ halmaz konvex burkát A alapú, \mathbf{p} csúcsú *gúlának* hívjuk. A hipersíkot azonosíthatjuk \mathbb{R}^{d-1} -gyel, és így tudunk A -nak a $(d-1)$ -dimenziós térfogatáról beszélni. A hipersík és \mathbf{p} távolsága (tehát az őket összekötő legrövidebb szakasz hossza) a gúla *magassága*. Belátható, hogy

$$(2) \quad \text{gúla } d\text{-dimenziós térfogata} = \frac{1}{d} \times (\text{alap } (d-1)\text{-dimenziós térfogata}) \times \text{magasság.}$$

A képlet $d=2$ és 3 esetben ismerős lehet. Most nem látjuk be (2)-t, ehhez egy kicsit kell tudni integrálni.

5. Szimplexek között

Ha egy háromszöget a súlypontja körül (-2) -szeresére nagyítunk, akkor egy öt tartalmazó háromszöget kapunk. Ha egy tetraédert a súlypontja körül (-3) -szorosára nagyítunk, akkor egy öt tartalmazó tetraédert kapunk. Most végig gondoljuk mindezt d dimenzióban.

Legyen S a $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d+1}$ általános helyzetű \mathbb{R}^d -beli pontok konvex burkaként kapott szimplex. A súlypontja az

$$\mathbf{s} = \frac{1}{d+1} (\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_{d+1})$$

pont.

Feladat. Lássuk be, hogy S -nek az \mathbf{s} középpontú $(-d)$ -arányú középpontos nagyítottja, S' , tartalmazza S -et. *Ne olvass tovább, segítség következik!*

Segítség. Állítsuk elő a \mathbf{p}_i pontot $\mathbf{p}_i = \lambda_1 \mathbf{p}'_1 + \dots + \lambda_{i-1} \mathbf{p}'_{i-1} + \lambda_{i+1} \mathbf{p}'_{i+1} + \dots + \lambda_{d+1} \mathbf{p}'_{d+1}$ alakban, ahol a λ_j együtthatók nemnegatívak, és az összegük 1.

Végül kimondhatjuk a cikk bevezetőjében szereplő síkbeli feladat d -dimenziós változatát.

2. tétel. *Adott \mathbb{R}^d -ben egy zárt, korlátos, konvex halmaz, K . Vegyük az összes K által tartalmazott szimplexet. Belátható (ezt hidd el), hogy ezek között van (esetleg több) maximális d -dimenziós térfogatú, legyen S ilyen szimplex. Ekkor, ha S -et az \mathbf{s} súlypontjából $(-d)$ -szeresére nagyítjuk, akkor az így kapott S' szimplex tartalmazza K -t.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása az eddigi előkészületekkel ugyanaz, mint a síkbeli eseté. Jelölje S csúcsait $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d+1}$, az S' csúcsait $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{d+1}$. Ekkor 1. állítás szerint minden S' -n kívül eső \mathbf{p} ponthoz van egy $i \in \{1, \dots, d+1\}$ index, hogy S' az $\{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{a}'_i\}$ pontok által meghatározott hipersík egyik oldalán található, míg \mathbf{p} a másikon. A (2) képlet alapján könnyű látni, hogy az

$$(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{a}_i\}) \cup \{\mathbf{p}\}$$

halmaz konvex burkaként kapott szimplex térfogata nagyobb S térfogatánál, ezért \mathbf{p} nem lehet K pontja. \square

Feladat. Lássuk be, hogy S -nek az \mathbf{s} középpontú $(d+1)$ -arányú középpontos nagyítottja tartalmazza K -t.

Hivatkozás

- [1] Naszódi M.: *Politópok és a gömb d -dimenzióban*, KöMaL **68.** évf. 9. sz. (2018).