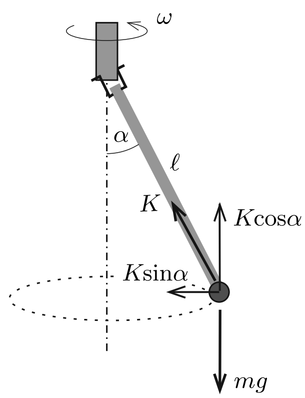
A kúpingáról

Egy ℓ hosszúságú könnyű (elhanyagolható tömegű), vékony (de merev) pálca egyik végére egy m tömegű, kicsiny testet erősítünk. A pálca másik végét vízszintes tengellyel látjuk el. Ilymódon egy matematikai ingának tekinthető rendszert kapunk, amelynek a pálca függőleges állásánál van stabil egyensúlyi helyzete, innen kicsit kimozdítva

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

lengésidejű harmonikus rezgőmozgást végezhet.

Vajon mi történik, ha a pálca felső végénél lévő vízszintes tengelyt – egy függőleges rúd és egy kengyel segítségével – adott ω szögsebességgel egyenletesen forgatjuk (*1. ábra*)? Az inga – ω nagyságától függő mértékben – valamekkora szögben kitérül, és (állandósult állapotban) a pálca egy kúp palástja mentén mozog. Emiatt ezt az elrendezést *kúpingának* is szokták nevezni.



1. ábra

Vizsgáljuk meg a kúpinga mozgását, és határozzuk meg, hogy miként függ a pálca kitérülésének α szöge az ω szögsebességtől! Az ingatestre két erő hat: az mg nehézségi erő, és a pálca által kifejtett, a pálcával megegyező irányú K erő.

Megjegyzés. Egy pálca (rúd) általában nem csak pálca irányú erőt képes kifejteni. (Például egy vízszintes helyzetű mérleghinta ki tudja egyensúlyozni a végén ülő gyerekre ható nehézségi erőt.) Esetünkben a pálca végeinél ható erőnek azért kell a pálca irányába mutatnia, mert a pálca tömege elhanyagolható, tehát a pálca fonálként „viselkedik”.

Az erők függőleges komponensei kiegyenlítik egymást, a K erő vízszintes összetevője biztosítja a centripetális erőt. Ez egyenletekben kifejezve:

$$K\cos\alpha = mg, \tag{1}$$

$$K\sin\alpha = F_\mathrm{c} = m\omega^2 r. \tag{2}$$

A körpálya sugarát a pálca hosszával és az α szöggel kifejezve $r = \ell\sin\alpha$. Ezt írjuk be a (2) egyenletbe, így az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$K\cos\alpha = mg,$$
$$K\sin\alpha = m\omega^2\ell\sin\alpha.$$

Az egyenletrendszernek az egyik nyilvánvaló (triviális) megoldása: $\alpha = 0$, a másik megoldás:

$$\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}.$$

Az első megoldás azt jelenti, hogy ha forgatni kezdjük az inga tengelyét, akkor az mindig lehetséges, hogy az inga mindvégig függőleges helyzetben lóg. A másik megoldás csak akkor lehetséges, ha $\cos\alpha = \dfrac{g}{\ell\omega^2} < 1$. Ez akkor nem teljesül, ha az ω szögsebesség viszonylag alacsony. Ha a forgás szögsebessége $\omega < \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$, az inga mindenképpen függőlegesen fog lógni. (A szögsebesség küszöbértéke éppen a forgatás nélküli matematikai inga lengésidejéhez tartozó $2\pi/T$ „szögsebesség”.)

Ha az inga szögsebessége a küszöbérték fölé növekszik, az inga forgása az

$$\alpha = \arccos \frac{g}{\ell\omega^2}$$

szög mellett lesz stabil, az $\alpha = 0$-nak megfelelő megoldás pedig – mint látni fogjuk – instabillá válik.

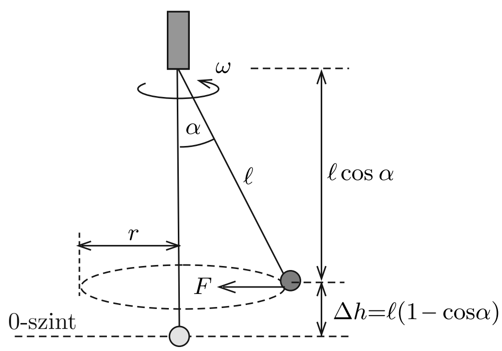
A stabilitás vizsgálata

A pálcával együtt forgó koordináta-rendszerből nézve az inga nehezéke mozdulatlan, egyensúlyi állapotban van. Azt, hogy az egyensúly stabil vagy instabil, a potenciális energiát megadó függvény vizsgálatával dönthetjük el. A stabil egyensúly a *minimális* helyzeti energiájú helyzetben valósul meg, az instabil helyzetre pedig az energia lokális maximuma jellemző.

Az ingatest megemelkedése miatt a nehézségi erőből származó helyzeti energiája (ha ennek a 0-szintjét az inga függőleges helyzetéhez választjuk):

$$E_1 = mg\ell(1 - \cos\alpha).$$

Az inga forgásából is származik egyfajta „helyzeti” energia. Ennek feltérképezéséhez vizsgáljuk meg, mennyi munkát kell végeznünk, ha a már forgásban lévő ingát a függőleges helyzetből lassan az α szöggel jellemzett helyzetbe hozzuk.



2. ábra

Ahhoz, hogy a tengelytől r távolságban (a forgó rendszerből nézve) egyensúlyban tartsuk az ingatestet, állandó

$$F(r) = m\omega^2 r$$

erővel kell a tengely felé húznunk. Ez az erő az r távolsággal egyenesen arányos, iránya pedig ellentétes az elmozdulás irányával. Az általunk végzett munka az átlagos erő és az elmozdulás szorzata:

$$W = -F_{\text{átlagos}} \cdot r = -\frac{m\omega^2 r + 0}{2} \cdot r = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\tfrac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\alpha.$$

(A negatív előjel arra utal, hogy az F erő ellentétes irányú az r elmozdulással.)

Ahhoz, hogy visszahúzzuk az ingatestet a tengelyhez, $+\frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\alpha$ munkát kell végeznünk. (Ha óvatosan elengedjük az ingatestet, ugyanekkora munkát nyerhetünk vissza, amíg r távolságra jut az ingatest a tengelytől.) Elmondhatjuk tehát, hogy az ingatestnek a tengelytől r távolságban a forgás következtében

$$E_2 = -\frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\alpha$$

helyzeti energiája van.

Az ingatest függőleges és vízszintes helyzetéből fakadó potenciális energiájának összege:

$$E(\alpha) = E_1 + E_2 = W = mg\ell(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\alpha,$$

amit a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ azonosság felhasználásával így is felírhatunk:

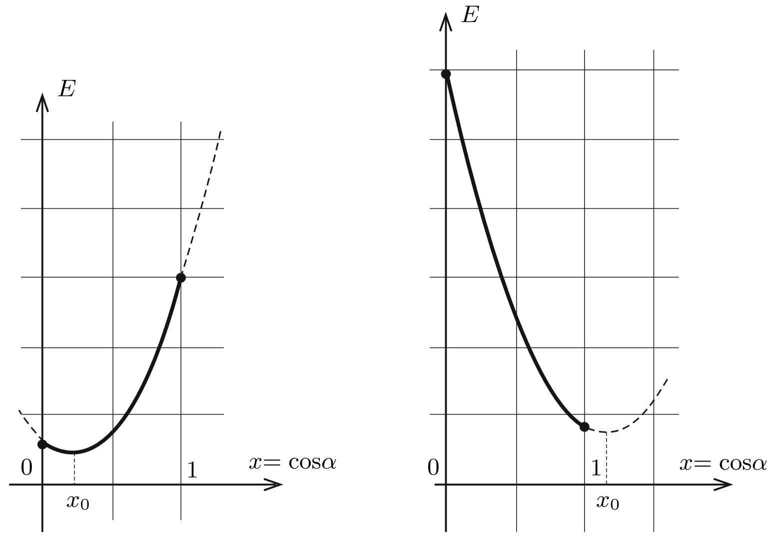
$$E(\alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\cos^2\alpha - mg\ell\cos\alpha + mg\ell - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2.$$

Ez a kifejezés $x \equiv \cos\alpha$-ra másodfokú: $E(x) = ax^2 + bx + x$ alakú, és fontos szem előtt tartanunk, hogy a függvény csak a $(0; 1]$ intervallumon van értelmezve, hiszen egy $-90° < \alpha < 90°$ szög koszinusza ebbe a tartományba eshet. A függvény képe egy pozitív irányba eltolt parabola íve. Ezért a másodfokú függvény minimuma vagy az

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-mg\ell}{2 \cdot \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2} = \frac{g}{\ell\omega^2}$$

értéknél, vagy pedig, ha ez az érték kiesik az értelmezési tartományból, akkor az értelmezési tartomány határánál $(x = 1)$ van.

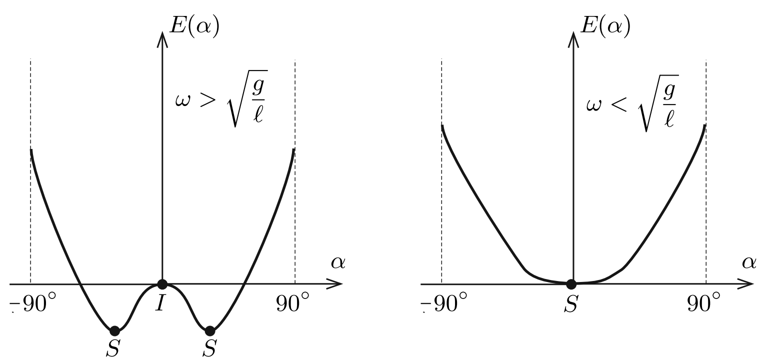
Ha $x_0 \leq 1$, vagyis az értelmezési tartományon belül van (*3a. ábra*), létezik olyan α_0 szög, amelyre $x_0 = \cos\alpha_0 = \frac{g}{\ell\omega^2}$. itt tehát *stabil* egyensúlyt (S) találunk. $x = 1$-nél ($\alpha = 0$ -nál), ami pedig energiamaximum, *instabil* (I) egyensúly van. Ha $x_0 > 1$, akkor a másodfokú kifejezést ábrázoló parabola csúcsa az értelmezési tartományon kívülre esik (*3b. ábra*), ezért $E(x)$ minimuma $x = 1$-hez kerül, tehát ez válik stabil egyensúllyá .



(a) (b)

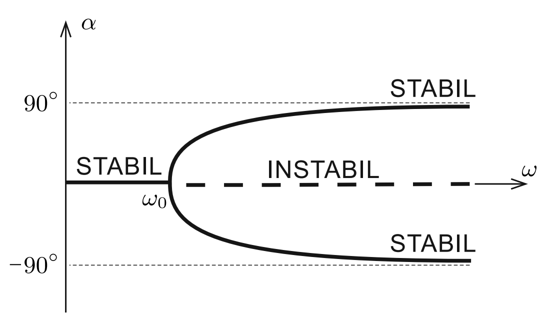
3. ábra

A fent leírtak jól látszanak, ha az energiát közvetlenül az α szög függvényében ábrázoljuk.



4. ábra

Ábrázoljuk az inga egyensúlyi helyzeteit jellemző α szöget az ω szögsebesség függvényében! Egy koszinusz értékhez két szög tartozik, melyek egymás ellentettjei (*5. ábra*):



5. ábra

Látható, hogy egy darabig csak a függőleges helyzet stabil, majd egy ω_0 értéknél ez a helyzet instabillá válik, és megjelenik két másik stabil egyensúlyi helyzet. A stabil állapot hirtelen kétszereződését, két ágra szakadását *bifurkációnak* nevezik.

Megjegyzések. 1. Érdekesség, hogy a bifurkáció kezdőpontjában, vagyis az ω_0 értéknél a függvény gráfjának meredeksége végtelen, vagyis az érintő „függőleges”.

2. A stabilitás vizsgálatát dinamikailag is el lehet végezni, ami a jelen esetben sokkal egyszerűbb, mint az energetikai vizsgálat, de ennek a cikknek az egyik célja az volt, hogy bemutassa az energetikai megfontolás lehetőségét.

3. A cikkben leírtakhoz hasonló problémával foglalkozik a 2020/2021. tanévi fizika OKTV I. kategóriájának 1. feladata is.

Baranyai Klára
Veresegyház