Merev testek mozgásegyenletei

A KöMaL fizika pontversenyében kitûzött feladatok közül jelentõs számú foglalkozik a merev testek mozgásával. Tekintettel arra, hogy a jelenlegi tananyagban erõsen visszaszorult a mechanikának ezen érdekes és fontos része, az alábbiakban röviden összefoglaljuk a merev testek mozgására vonatkozó legfontosabb ismereteket. Írásunkkal elsõsorban azoknak a diákoknak szeretnénk segíteni, akik az iskolában nem (vagy nem elég részletesen) tanulnak a merev testek forgómozgásáról. Azoknak, akik alaposabban szeretnének elmélyedni ebben a témakörben, a *Fizika* címû kézikönyvet ajánljuk (Akadémiai Kiadó, 2009., fõszerkesztõ Holics László).

Merev testnek az olyan (idealizált) testet nevezzük, amelynek alakja (tetszõleges két pontja közötti távolság) a mozgás során nem (vagy csak elhanyagolhatóan kis mértékben) változik meg. Jól ismert, hogy egy tömegpont térbeli mozgásának leírására 3 koordináta elegendõ. A merev testek pillanatnyi helyzete ennél bonyolultabban, 6 adattal írható le. Ez a 6 adat lehet például a tömegközéppont 3 koordinátája és a test térbeli irányultságát jellemzõ 3 szögkoordináta. Egyszerûbb a helyzet a merev testek síkmozgásánál, ahol a tömegközéppontot 2 adattal, a test elfordulását pedig egyetlen szöggel tudjuk jellemezni.[1] A továbbiakban csak ezzel az esettel fogunk foglalkozni, mert a merev testekre vonatkozó kitûzött feladatok döntõ többsége is csak ilyen mozgások leírását igényli.

Ha a merev test tömegközéppontjának pillanatnyi helyét az $\boldsymbol{r}(t)$ vektor adja meg, akkor a tömegközéppont pillanatnyi sebessége

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}, \tag{1}$$

ahol Δt egy nagyon kicsi idõtartam. (Precízebben fogalmazva: a sebességvektor a helyvektor idõ szerinti deriváltja.) A tömegközéppont pillanatnyi gyorsulása:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\Delta \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}. \tag{2}$$

Newton mozgástörvénye szerint

$$m\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{F}(t), \tag{3}$$

ahol m a merev test össztömege, $\boldsymbol{F}(t)$ pedig a a testre ható *külsõ* erõk eredõje. (Nagyon lényeges, hogy a test belsejében ható, a test egyik darabkájának a másik részre kifejtett (és általában ismeretlen) erõket nem kell beleírnunk a mozgásegyenletbe. Ez az egyenlet nagyon hasonló a tömegpontok mozgásegyenletéhez.

A merev test térbeli helyzetét (síkmozgás esetén) minden pillanatban egyetlen $\varphi(t)$ szöggel jellemezhetjük. (Ez a szög egy kerékpár kerekének mozgásánál lehet pl. a kerék tengelyét a szelepsapkával összekötõ egyenesnek a függõlegessel bezárt szöge.) A radiánban mért szög változási sebességét (az ún. szögsebességet) az

$$\omega(t) = \frac{\Delta \varphi(t)}{\Delta t} \tag{1'}$$

összefüggés adja meg, a szögsebesség változási sebességét (a szöggyorsulást) pedig így számíthatjuk ki:

$$\beta(t) = \frac{\Delta \omega(t)}{\Delta t}. \tag{2'}$$

A Newton-féle mozgásegyenletekbõl levezethetõ, hogy a merev test szöggyorsulása a testre ható külsõ erõk eredõ forgatónyomatékával arányos:

$$\Theta\beta(t) = M(t), \tag{3'}$$

ahol Θ a merev testre jellemzõ állandó (az ún. tehetetlenségi nyomaték), $M(t)$ pedig a külsõ erõktõl származó (a tömegközéppontra vonatkoztatott) eredõ forgatónyomaték.

Megjegyzés. A merev test tehetetlenségi nyomatéka a test tömege mellett függ még a test alakjától és a forgástengely irányától. A tehetetlenségi nyomaték véges sok tömegpont esetén így számítható ki:

$$\Theta = \sum_i m_i d_i^2,$$

ahol m_i a test egyes tömegpontok tömege, d_i pedig a tömegközépponttól mért távolságuk.

Általános esetben a tehetetlenségi nyomaték méréssel határozható meg, hasonlóan a test egyéb adataihoz (tömege, térfogata stb.) Szabályos alakú, homogén tömegeloszlású merev testek tehetetlenségi nyomatéka táblázatokban megtalálható adat. Egy

[1] Síkmozgást végez a merev test, ha pontjai egy adott koordináta-rendszerben egy adott síkkal párhuzamosan mozognak.

ℓ hosszúságú rúdnál pl. $\Theta = \frac{1}{12}m\ell^2$, R sugarú korongra (vagy hengerre) $\frac{1}{2}mR^2$, vékony abroncsra mR^2, gömbre pedig $\frac{2}{5}mR^2$. A kitûzött feladatokban általában ilyen merev testek fordulnak elõ.

Szembeötlõ az (1), (2) és (3) egyenletek, valamint az (1'), (2') és (3') egyenletek alaki hasonlósága. Ha a

tömegközéppont helye	$\Leftrightarrow$	elfordulás szöge,
tömegközéppont sebessége	$\Leftrightarrow$	szögsebesség,
tömegközéppont gyorsulása	$\Leftrightarrow$	szöggyorsulás,
merev test össztömege	$\Leftrightarrow$	tehetetlenségi nyomaték,
eredõ (külsõ) erõ	$\Leftrightarrow$	eredõ (külsõ) forgatónyomaték

megfeleltetést nézzük, a két egyenletrendszer teljes analógiát mutat.

Megjegyzés. A hasonlóságot kicsit sérti, hogy míg a tömegközéppont jellemzõi (síkbeli) vektorok, addig a szögelfordulás, a szögsebesség, a szöggyorsulás és a forgatónyomaték skalár mennyiségek. Ez azonban csak a síkmozgásnál van így, az általánosabb (térbeli) forgómozgásnál a „szögekre vonatkozó" fizikai mennyiségek is vektorokkal adhatók meg.)

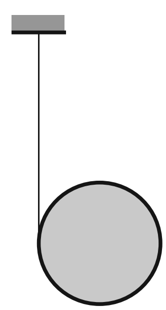
A merev testek síkmozgásának legegyszerûbb esete a rögzített tengely körüli forgómozgás. Ilyenkor a test helyzete egyetlen szögadattal adható meg, és a tömegközéppont mozgásegyenletével külön nem kell foglalkoznunk. (Ha a tömegközéppont a forgástengelyre esik, akkor mindvégig nyugalomban marad, ha pedig a forgástengelyen kívül van, akkor a gyorsulása kifejezhetõ a test szögsebességével és szöggyorsulásával.)

Rögzített tengely körüli forgást célszerû a forgástengelyhez képest leírni, és ez a tengely esetleg nem halad át a tömegközépponton. Ekkor szükségünk lehet a tömegközépponttól d távolságban lévõ tengelyre vonatkoztatott Θ' tehetetlenségi nyomatékra. Ezt a *Steiner-tétel* segítségével számíthatjuk ki:

$$\Theta' = \Theta_{\mathrm{TKP}} + md^2,$$

ahol Θ_{TKP} a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, m pedig a test össztömege.

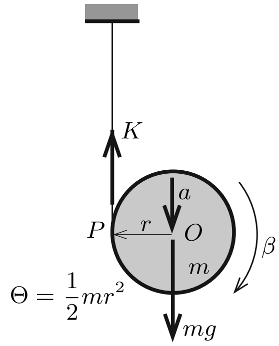
A fentebb leírtakat egy konkrét feladaton, a jojó példáján keresztül mutatjuk be. Az *1. ábrán* látható (homogén anyageloszlású, r sugarú) henger a rátekert vékony, hajlékony, nyújthatatlan fonál mentén egyre gyorsabban süllyed lefelé, miközben a forgása is egyre gyorsabbá válik. (A fonál kezdetben függõleges és a test nyugalomban van. A test tengelyének „elbillenését" két fonál alkalmazásával akadályozhatjuk meg, de az egyszerûség kedvéért a továbbiakban egyetlen fonálról fogunk beszélni.)



1. ábra

Kérdések. Mekkora (és milyen irányú) gyorsulással fog mozogni a henger tömegközéppontja? Mekkora a henger szöggyorsulása? Mekkora erõ feszíti a fanalat?

Megoldás. Vegyük fel – a szokásos jelöléseket alkalmazva – az ismert és keresett mennyiségeket a *2. ábrán* látható módon.



2. ábra

Az O tömegközéppont mozgásegyenlete:

$$mg - K = ma. \tag{4}$$

A gyorsulás irányát a függõleges irányú nehézségi erõ és az ugyancsak függõleges irányú fonálerõ eredõje határozza meg. Eszerint a tömegközéppont gyorsulása mindvégig függõleges, és a fonál sem „térül el” a függõleges iránytól.

A tömegközéppont körüli forgás egyenlete:

$$Kr = \Theta\beta = \frac{1}{2}mr^2\beta, \tag{5}$$

és végül a szöggyorsulás és a lineáris gyorsulás közötti (kinematikai) kapcsolat:

$$a - r\beta = 0. \tag{6}$$

Az utolsó egyenlet azt fejezi ki, hogy a P pont (ami az a gyorsulással lefelé mozgó O tömegközépponthoz képest $r\beta$ nagyságú, felfelé irányuló érintõleges gyorsulással rendelkezik) eredõ gyorsulása *nulla*, hiszen az ugyancsak gyorsulásmentes fonállal érintkezik.

A (4)-(6) egyenletrendszer megoldása:

$$a = \frac{2}{3}g, \qquad K = \frac{1}{3}mg \qquad \text{és} \qquad \beta = \frac{2g}{3r}.$$

Megjegyzés. Ugyanezt az eredményt látszólag egyszerûbben is megkaphatjuk, ha a P pontra írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét. Mivel (a Steiner-tétel szerint) $\Theta_P = \Theta_{\mathrm{TKP}} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$, a szöggyorsulás pedig nem függ a vonatkoztatási pont megválasztásától, a mozgásegyenlet:

$$mg\,R = \frac{3}{2}mR^2\,\frac{a}{R}, \qquad \text{vagyis} \qquad a = \frac{2}{3}g.$$

A tömegközéppont mozgásegyenlete adja meg a fonalat feszítõ erõt:

$$ma = mg - K, \qquad \text{azaz} \qquad K = \frac{1}{3}mg.$$

Vajon jogosan alkalmazhatjuk a forgómozgás alapegyenletét – változatlan formában – a merev test tetszõleges pontjára? A válasz: *nem*! Javasoljuk az Olvasónak, hogy írja fel a mozgásegyenleteket az OP egyenes tetszõleges pontjára, és oldja is meg azokat. Látni fogja, hogy általában *hibás* eredményt kap, két eset, az O és a P pont kivételével. Vajon mi tünteti ki ezt a két pontot a többivel szemben? Az O pont a tömegközéppont, arra – a cikkben leírtak szerint – érvényes a mozgásegyenlet. De a P pontnak miért van kitüntetett szerepe?

Általánosan elterjedt nézet szerint azért kapunk helyes eredményt, mert a P pontjának pillanatnyi sebessége nulla, tehát ez a merev test pillanatnyi forgási középpontja (ún. momentán centruma). Ez azonban egy *hibás* nézet! (A pillanatnyi sebesség nulla vagy nem nulla volta függ attól, hogy melyik koordináta-rendszerben írjuk le a mozgást. A fizika törvényei azonban mindegyik inerciarendszerben ugyanolyan alakban érvényesek, tehát a momentán centrumra való hivatkozás nem lehet a helyes magyarázat.) A helyes válasz kicsit bonyolultabb: a forgómozgás egyenlete csak olyan pontra érvényes, amelynek gyorsulása átmegy a tömegközépponton. Ilyen pont maga a tömegközéppont, illetve statikában (amikor a test minden szempontból nyugalomban van) a merev test *tetszõleges* pontja. Általános esetben azonban óvatosan kell eljárnunk, a naivan felírt egyenletek hibás eredményre vezethetnek. A jojónál a P pont pillanatnyi (centripetális) gyorsulása vízszintes irányú, tehát átmegy a henger tömegközéppontján, ez magyarázza, hogy miért kapunk helyes eredményt.

Gnädig Péter
Vácduka