

Háromszögbeli érdekességek

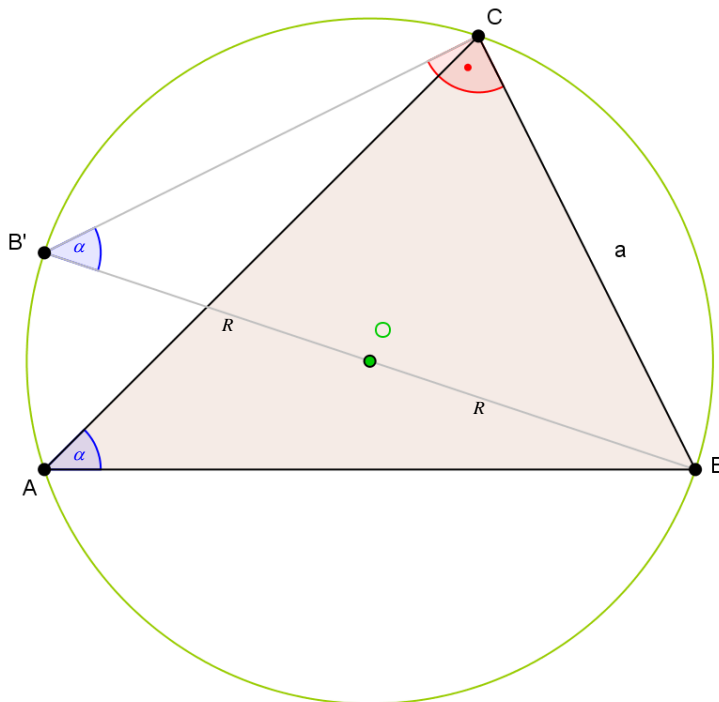
1.

Ismert, hogy egy (általános, hegyesszögű, szokásosan megbetűzött) háromszög oldalai, szögei és a körülírt kör sugara között fennáll:

$$(1a,b,c) \quad a = 2R \cdot \sin \alpha,$$

$$b = 2R \cdot \sin \beta, \quad c = 2R \cdot \sin \gamma.$$

(Az ábrán az a oldallal kapcsolatos bizonyítás látható: megrajzolva pl. a BB' átmérőt, Thalész tétele miatt a $BB'C$ háromszög derékszögű lesz, amelynek B' -nél lévő szöge a kerületi szögek tétele miatt szintén α , és ebben a háromszögben a szöggel szemközti a befogó és a $2R$ átfogó hányadosa $\sin \alpha$, amiből átrendezéssel következik a felírt alak. A másik eset hasonló módon bizonyítható.)



Van-e vajon geometriai tartalmuk, megadnak-e vajon valamilyen nevezetes szakasz hosszakat az analóg módon felírt $2R \cdot \cos \alpha$, $2R \cdot \cos \beta$, $2R \cdot \cos \gamma$ kifejezések?

Rajzoljuk meg a háromszög magasságvonalait! Ezek talppontjai T , U , V , amely

pontok az a oldalt $u+v$, a b oldalt $w+x$, a c oldalt $y+z$ darabokra vágják. A

magasságvonalak $AT = m_a$,

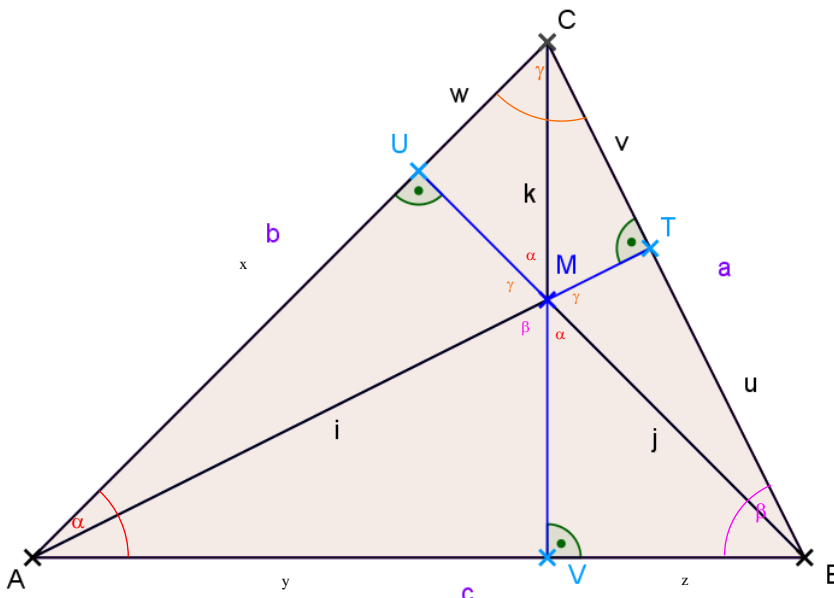
$BU = m_b$, $CV = m_c$;

metszéspontjuk M , a Δ

magasságpontja. Az M pont

körül a magasságvonalak által

létrehozott hat szög



mindegyike az eredeti háromszög valamely szögével egyenlő, az ábra szerint. (Pl. a CVA Δ és a CUM Δ hasonlók, mert C -nél lévő szögük közös és van még egy derékszögük, emiatt harmadik

szögük is egyenlő, tehát $CMU \sphericalangle = \alpha$, és a vele csúcsszög $VMB \sphericalangle$ is ekkora. A többi eset hasonlóan belátható.)

Jelölje a csúcstól a magasságpontig tartó szakaszokat $i = AM$, $j = BM$, $k = CM$. Az $AVM\Delta$ -ból $\sin \beta = \frac{y}{i}$, ugyanakkor a jól ismert „két oldal és a közrezárt szög szinuszának szorzata per 2”

területképletből $\sin \beta = \frac{2T_{ABC}}{ac}$. Ezek egyenlőségéből $i = \frac{acy}{2T_{ABC}}$, a terület helyébe a jól ismert

$\frac{abc}{4R}$ kifejezést írva: $i = \frac{acy \cdot 4R}{2 \cdot abc} = 2R \frac{y}{b}$, ami az $AVC\Delta$ -ből

$$(2a) \quad i = 2R \cdot \cos \alpha.$$

Hasonlóan a $BTM\Delta$ -ből $\sin \gamma = \frac{u}{j} = \frac{2T_{ABC}}{ab}$, ebből $j = \frac{abu}{2T_{ABC}} = \frac{abu \cdot 4R}{2 \cdot abc} = 2R \frac{u}{c}$, ami a $BTA\Delta$ -

ből

$$(2b) \quad j = 2R \cdot \cos \beta.$$

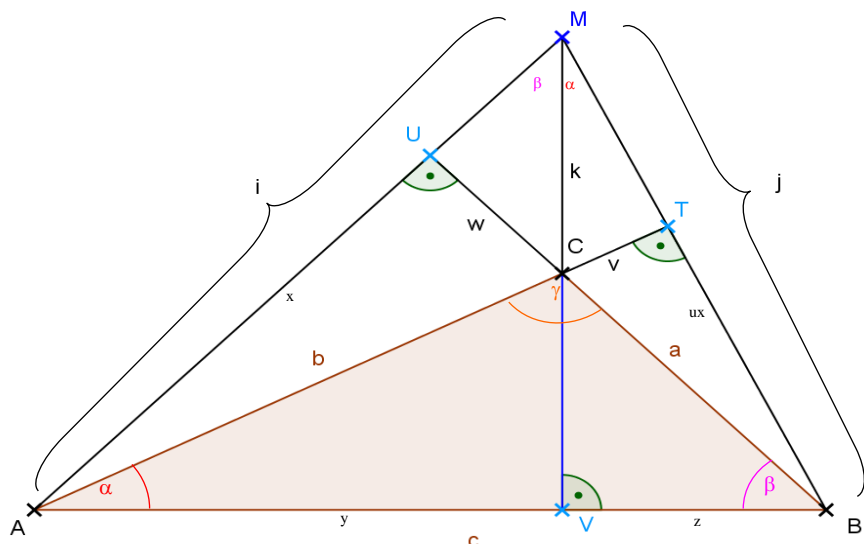
Végül a $CUM\Delta$ -ből $\sin \alpha = \frac{w}{k} = \frac{2T_{ABC}}{bc}$, ebből $k = \frac{bcw}{2T_{ABC}} = \frac{bcw \cdot 4R}{2 \cdot abc} = 2R \frac{w}{a}$, ami a $CUB\Delta$ -

ből

$$(2c) \quad k = 2R \cdot \cos \gamma.$$

Tehát a kérdésben feltett kifejezések **a csúcspont és a magasságpont távolságát** adják meg.

Felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet ugyanezen távolságokkal tompaszögű háromszögben? A mély analógia kedvéért tekintsük az iménti hegyesszögű $ABC\Delta$ A , B és M pontjai által alkotott tompaszögű háromszöget. Ennek (mint az **A síkbeli ortocentrikus pontnégyes** c. cikkben olvasható) a magasságpontja az „eredeti” C pont (persze az új ábrán az új funkcióknak megfelelő a betűzés), a magasságtalppontjai ugyanazon T , U , V pontok, mint az „eredeti” háromszögé, körülírt körének sugara is ugyanakkora (szintén R). Az ugyanazon betűjelű (funkciójú) pontok meghatározta szakaszok jelölése ugyanaz, mint a



hegyesszögű esetben (pl. $CU = w$), bár a szakaszok elhelyezkedése itt többségében más, mint ott.

Erre a háromszögre is igazak az (1a,b,c) összefüggések – igaz, itt más szögeket és (a és b esetén) más szakaszokat jelölünk ugyanazon betűkkel, mint az imént. Ezért (megkülönböztetésül) lássuk el h (mint hegyesszögű) és t (mint tompaszögű) indexszel a két esetbeli jeleket az összefüggésekben.

Így

$$(1'a,b,c) \quad a_h = 2R \cdot \sin \alpha_h, \quad b_h = 2R \cdot \sin \beta_h, \quad c_h = 2R \cdot \sin \gamma_h,$$

ugyanakkor

$$(3a,b,c) \quad a_t = 2R \cdot \sin \alpha_t, \quad b_t = 2R \cdot \sin \beta_t, \quad c_t = 2R \cdot \sin \gamma_t,$$

vagyis e tekintetben **teljes az analógia**.

Vegyük észre, hogy a két esetbeli c oldal azonos, ezért (1'c) és (3c) egyenlőségéből $\sin \gamma_h = \sin \gamma_t$. Ez azonban magától értetődő, hiszen a két szög egymás kiegészítő szöge, amint az a két ábra összehasonlításából kitűnik:

$$(4) \quad \gamma_t = \alpha_h + \beta_h = 180^\circ - \gamma_h.$$

Írjuk fel újra, ezúttal már indexelve:

$$(2'a,b,c) \quad i_h = 2R \cdot \cos \alpha_h, \quad j_h = 2R \cdot \cos \beta_h, \quad k_h = 2R \cdot \cos \gamma_h.$$

Vizsgáljuk meg most a tompaszögű esetben a csúcs-magasságpont távolságokat! (Itt is i, j, k -val jelölve, bár

$$(5a,b,c) \quad i_t = b_h, \quad j_t = a_h, \quad \text{és csak } k_t = k_h.)$$

Az AUB és a AVM Δ -ek hasonlók, mert A -nál lévő szögük közös és van még egy derékszögük, emiatt harmadik szögük is egyenlő, tehát $AMV \sphericalangle = \beta$. Hasonlóan kapjuk, hogy $BMV \sphericalangle = \alpha$. (Ismét a két ábra összehasonlításából adódik a (4) egyenlőség „fordítottja”:

$$(6) \quad \gamma_h = \alpha_t + \beta_t,$$

amit persze magának (4)-nek az átrendezéséből és a háromszög szögösszegéből is megkaphatunk.)

Ekkor a hegyesszögű esethez hasonlóan az $AVM\Delta$ -ből $\sin \beta = \frac{y}{i}$, ugyanakkor a területképletből

$$\sin \beta = \frac{2T}{ac}. \quad \text{Ezek egyenlőségéből } i = \frac{acy}{2T}, \text{ beírva } T \text{ helyébe } \frac{abc}{4R} \text{-et: } i = \frac{acy \cdot 4R}{2 \cdot abc} = 2R \frac{y}{b}, \text{ ami a}$$

$AVC\Delta$ -ből (már indexekkel):

$$(7a) \quad i_t = 2R \cdot \cos \alpha_t.$$

$$\text{Hasonlóan a } BVM\Delta \text{-ből } \sin \alpha = \frac{z}{j} = \frac{2T}{bc}, \text{ ebből } j = \frac{bcz}{2T} = \frac{bcz \cdot 4R}{2 \cdot abc} = 2R \frac{z}{a}, \text{ ami a } BVC\Delta \text{-ből}$$

$$(7b) \quad j_t = 2R \cdot \cos \beta_t.$$

$$\text{Végül a } MUC\Delta \text{-ből } \sin \beta = \frac{w}{k} = \frac{2T}{ac}, \text{ ebből } k = \frac{acw}{2T} = \frac{acw \cdot 4R}{2 \cdot abc} = 2R \frac{w}{b}, \text{ ami a } CUA\Delta \text{-ből}$$

$$(7c) \quad k_t = 2R \cdot \cos (180^\circ - \gamma_t).$$

Tehát a (2'a,b,c) és a (7a,b,c) összefüggések is (szinte) **teljes analógiát** mutatnak; az eltérés a (6c)-ben annyi, hogy γ helyett $180^\circ - \gamma$ koszinusza szerepel – ami egyrészt azért magától értetődő, szükségszerű, mert γ tompaszög, így koszinusza negatív, míg persze k_t nem lehet az; másrészt az (5c), a (2'c) és a (4) egyenlőségekből ez következik.

Érdekes szemügyre venni néhány további megfelelést a két eset, két ábra szögei és szakaszai között. A (4)-ben már láttuk a két esetbeli γ szögek közti kapcsolatot (kiegészítő szögek). Az ábrák összehasonlításából adódik, hogy a két esetbeli α és β szögek „keresztben” véve pótszögek, vagyis

$$(8a,b) \quad \alpha_h + \beta_t = 90^\circ \quad \text{és} \quad \alpha_t + \beta_h = 90^\circ,$$

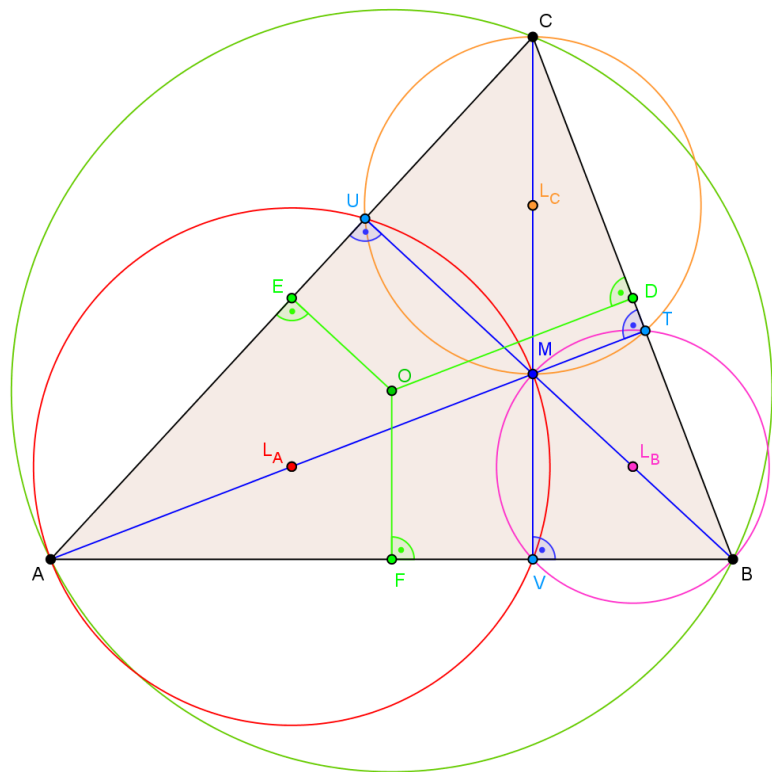
amit dualitásnak is tekinthetünk. Ugyanígy duális az (5a,b) egyenlőségekkel, hogy

$$(9a,b) \quad i_h = b_t \quad \text{és} \quad j_h = a_t.$$

A két ábrában viszont azonos az u , az x , az y , a z (és mint láttuk, a k) szakasz. Érdekes a v és w szakaszok szerepe: ezek mindkét ábrában a *CUMT* (két szemközti derékszöge miatt nem mellesleg: húr-)négyszög oldalai (betűzés szerint mindkétszer *CT* és *CU*, de konkrét elhelyezkedés szerint más, szomszédos szakaszok); míg e négyszög másik két oldala (*MT* és *MU*) a hegyesszögű ábrában $m_a - i$ és $m_b - j$, a tompaszögűben (rendre) $j - m_b$ és $i - m_a$. (Újabb dualitás.)

2.

Ahogy a fenti utolsó bekezdésben láttuk, a háromszög egy csúcsa és a magasságpontja két magasság-talpponttal húr-négyszöget alkot (két szemközti derékszöge miatt). Hegyesszögű háromszögben ez mindhárom csúcs esetén teljesül: *AVMU*, *BTMV*, *CUMT*. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $i = AM$, $j = BM$, $k = CM$ szakaszokra írt Thalész-körökön rajta vannak a megfelelő magasság-talppontok. E Thalész-körök középpontjai ezen



szakaszok felezőpontjai (rendre L_A, L_B, L_C), sugaraik pedig $\frac{i}{2}, \frac{j}{2}, \frac{k}{2}$, vagyis (2) szerint $R \cdot \cos \alpha,$

$R \cdot \cos \beta, R \cdot \cos \gamma.$

Mivel bármely két kör hasonló egymáshoz (sőt, alkalmas

centrummal középpontos hasonlósággal

átvihető egymásba,

ld. a **Körök**

hasonlósága c.

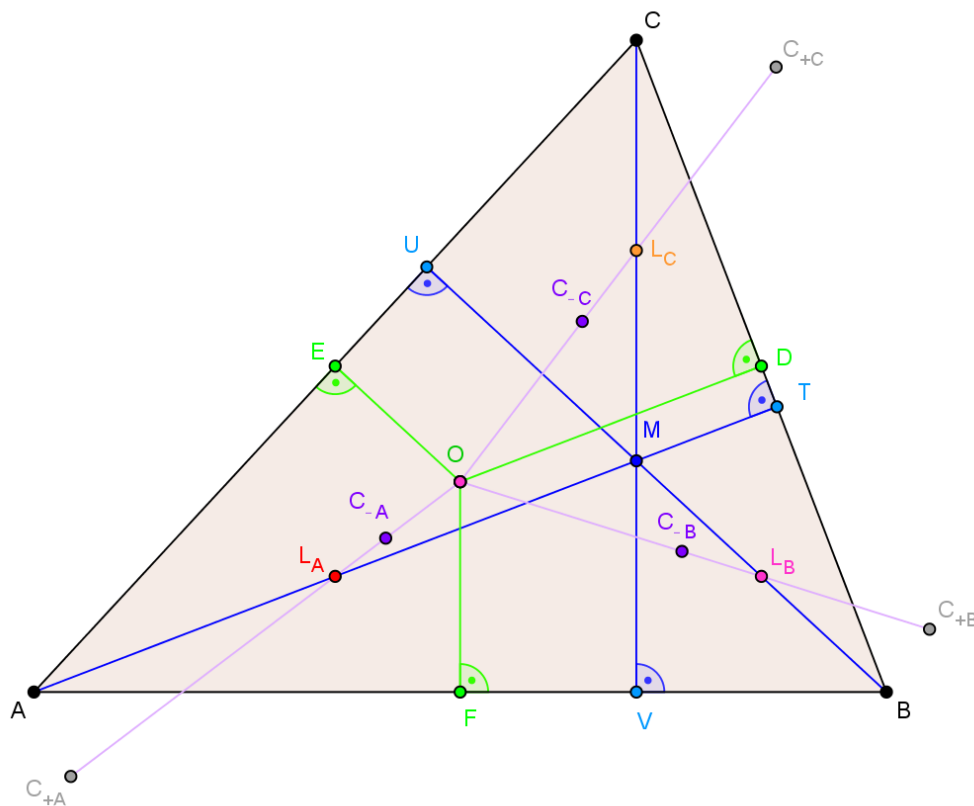
cikket), ezen

Thalész-körök

megkaphatók a

háromszög körülírt

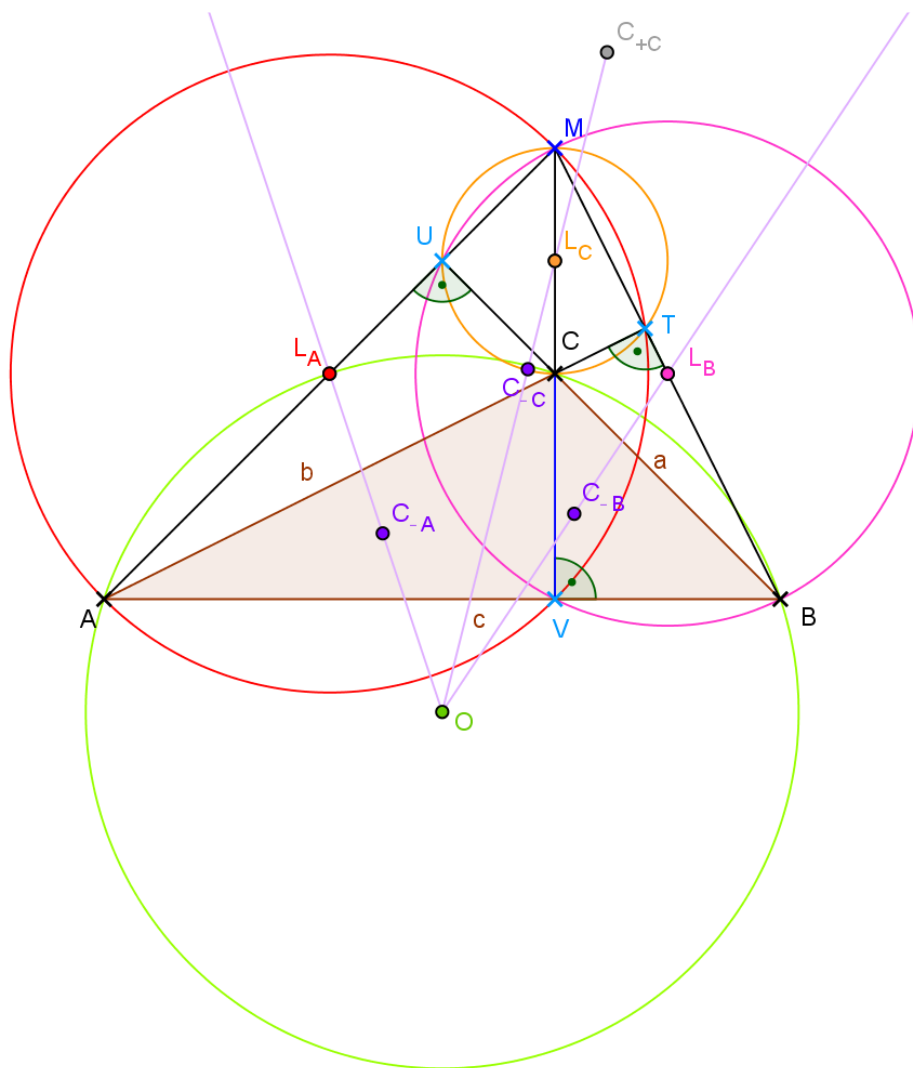
körének



kicsinyítéseiként. A hasonlósági arány (λ) a sugarak nagysága miatt rendre $\pm \cos \alpha, \pm \cos \beta$ és $\pm \cos \gamma$, a hasonlósági centrumok pedig az OL_A, OL_B, OL_C egyeneseken, az L pontoktól (O -tól

ellenkező irányban, ill. afelé) $\frac{\cos \alpha}{1 \mp \cos \alpha} OL_A, \frac{\cos \beta}{1 \mp \cos \beta} OL_B, \frac{\cos \gamma}{1 \mp \cos \gamma} OL_C$ távolságban lévő pontok.

(Ahol O az eredeti háromszög körülírt körének középpontja, a pozitív arányú hasonlóság centrumai a megfelelő csúcsokkal indexelt C_+ pontok, a negatívaké a C_- pontok. Magát a kicsinyítést animációban meg lehet nézni a hegyes-pozitív.gif, illetve a hegyes-negatív.gif fájlban. Az előbbiben a körülírt kör átmegegy a három Thalész-körbe a megfelelő centrumú pozitív arányú hasonlósággal, míg az utóbbiban pedig értelemszerűen a negatív arányúval.



A tompaszögű háromszög esete itt is némileg eltér: a tompa γ szög miatt $\cos \gamma$ helyett (a (7c)-hez hasonlóan) minden képletben $\cos (180^\circ - \gamma)$ -t (vagy $-\cos \gamma$ -t vagy $|\cos \gamma|$ -et) kell írni. Az animáció a tompa1.gif, illetve a tompa2.gif fájlban követhető nyomon. (Itt két hasonlósági centrum, C_{+A} és C_{+B} annyira messze esik az ábra lényegi részétől, hogy az induláskor képernyőn kívül van. Kicsinyítéssel [egérgöggővel] a látótérbe hozhatók lettek volna, de ekkor meg a körök transzformációjából nem látszódná lényegében semmi.)

Siposs András
(ELTE Apáczai Csere János Gimnázium)