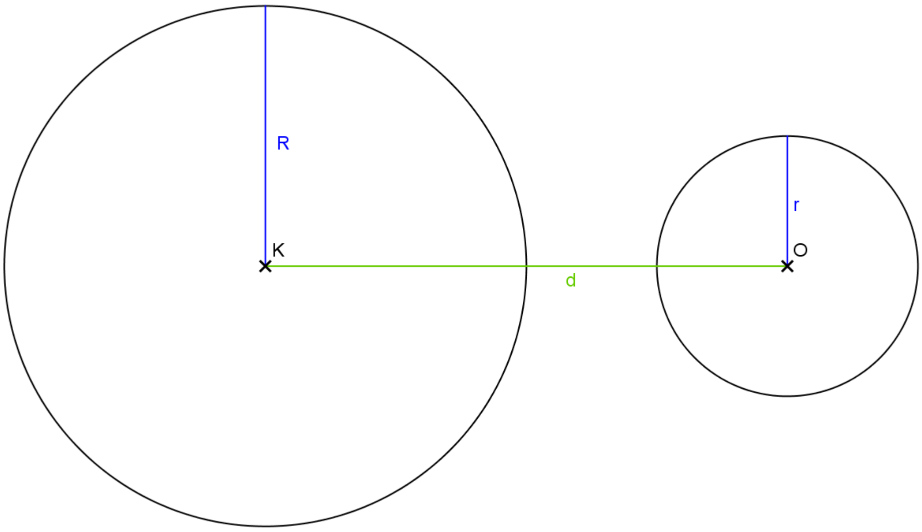
# Körök hasonlósága



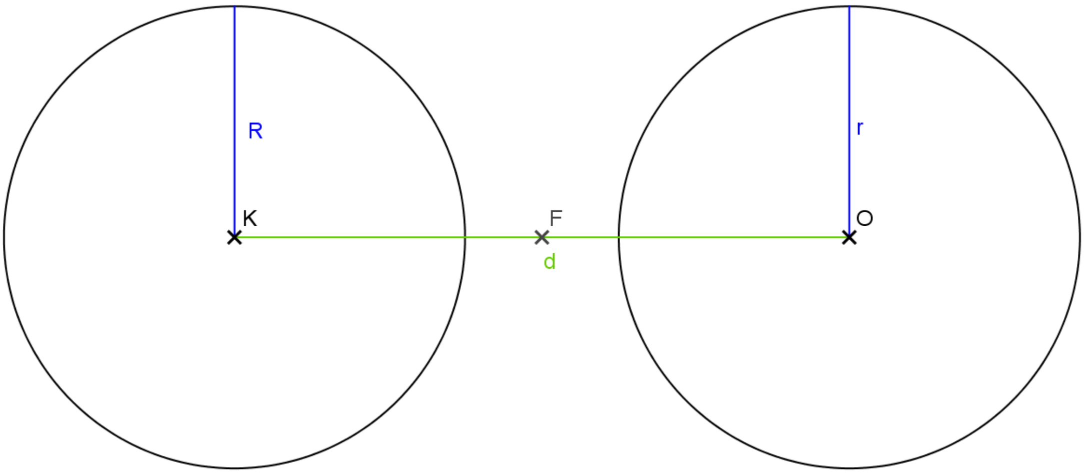

Ismert, hogy bármely két kör hasonló egymáshoz. Alább meghatározzuk két tetszőleges kör esetén a hasonlósági középpont helyét és a hasonlóság arányát.

Legyenek a körök középpontjai $K$ és $O$, sugaraik $R$ és $r$, középpontjaik távolsága (a centrális szakasz hossza) $d$.

Általában kétféle hasonlóság is létezik, amely (pl.) a nagyobb kört átviszi a kisebbe, ezek aránya

(1) $$\lambda = \pm \frac{r}{R}$$

lehet. (Ha a kisebb kört akarjuk átvinni a nagyobba, a fenti arányok reciprokát kell venni.) Kivétel a két kör többféle lehetséges kölcsönös helyzete közül az $R = r$, de $d \neq 0$ eset, ekkor csak




a negatív (azaz ekkor –1) arányú hasonlóság létezik, a $KO$ szakasz felezőpontja centrummal, vagyis ez egy középpontos tükrözés. (A pozitív arányú hasonlóság helyett a másik lehetséges transzformáció a körök között ekkor egy $\mathbf{v} = \overrightarrow{KO}$ vektorú eltolás. A Korok1a.gif animációban a bal oldali kör pontjai középpontos tükrözéssel mennek át a jobb oldali kör megfelelő pontjaiba, míg a Korok1b.gif animációban a bal oldalon látható kör eltolással megy át a jobb oldali körbe.) Speciális a koncentrikus (vagy akár egybeeső) körök esete, ekkor a hasonlósági centrum a közös középpont, de létezik mindkét arány (ld. Korok2negativ.gif és Korok2pozitiv.gif).

Az általános esetben a pozitív arány esetén a hasonlósági centrum a két kör középpontján kívül, a centrális egyenesen $O$-tól a $K$-val ellenkező irányban, $x$ távolságban van ($C_+$ pont); negatív arány esetén a $KO$ szakasz belsejében, $O$-tól $y$ távolságra ($C_-$ pont). Válasszunk a két körön egy-egy egymásnak megfelelő pontot (pl. a centrálisra merőleges sugár végpontját, $P$ és $Q$), ezek a körközéppontokkal és a hasonlósági centrummal háromszögeket alkotnak, amelyek hasonlók: $C_+OQ_+\Delta \sim C_+KP\Delta$, ill. $C_-OQ_-\Delta \sim C_-KP\Delta$, amikből

(2a,b) $$\lambda_+ = \frac{x}{x+d}\,,\ \ |\lambda_-| = \frac{y}{d-y}\,.$$

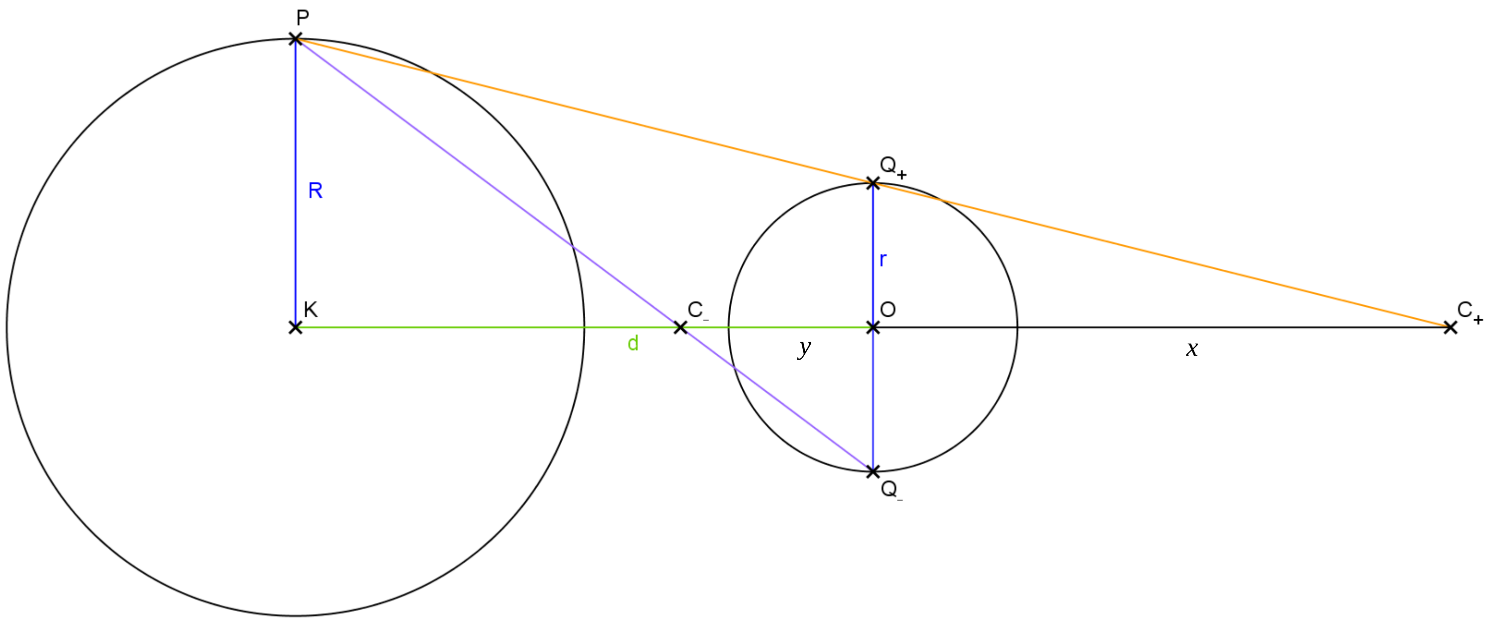
Ezek rendezésével:

(3a,b) $$x = \frac{\lambda_+}{1-\lambda_+}d\,,\ \ y = \frac{|\lambda_-|}{1+|\lambda_-|}d\,.$$

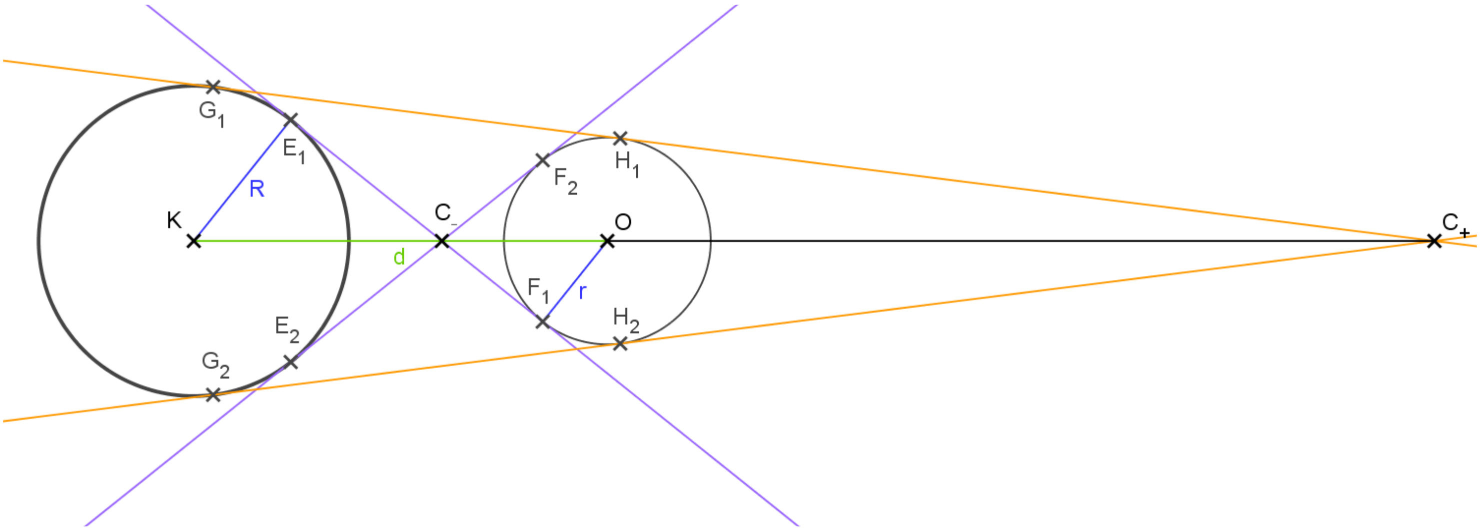
Beírva $\lambda$ (1)-beli értékét (a két sugár megfelelő előjelű hányadosát), kapjuk:

(4a,b) $$x = \frac{r}{R-r}d\,,\ \ y = \frac{r}{R+r}d\,.$$

(Az utóbbi esetben a negatív előjelet a képlet alakjával már figyelembe vettük. Ld. Korok3a-negativ.gif, Korok3a-pozitiv.gif, Korok3b-negativ.gif és Korok3b-pozitiv.gif. A képletek szerkezete analógiát mutat számos más esetbelivel, pl. egy háromszög külső, ill. belső szögfelezője által a szemközti oldalon [annak egyenesén] létrehozott szakaszok hosszával, vagy párhuzamos ellenkező, ill. azonos irányú erők eredője hatásvonalának az összetevők hatásvonalától való távolságával stb.)




Amikor a két kör helyzete olyan, hogy vannak közös érintőik, $C_+$ egyúttal a közös külső érintők egymással (és a centrálissal) való metszéspontja, $C_-$ pedig a közös belső érintőké. Az eddig tárgyalt középpontos hasonlóságok a megfelelő érintési pontokat pedig egymásba viszik át ($E\leftrightarrow F$, $G\leftrightarrow H$, azonos indexek esetén).




**Siposs András**
(ELTE Apáczai Csere János Gimnázium)