# KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
## INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 6. szám Budapest, 2019. szeptember

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft


TARTALOMJEGYZÉK






A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

# Beszámoló a 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 11–22. között Angliában, Bath városában rendezték meg. A versenyen 112 ország 621 diákja vett részt. Ez a résztvevő országok és a résztvevő versenyzők számát tekintve is új rekordot jelent.

A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Albánia, Algéria (5), Amerikai Egyesült Államok, Angola (2), Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades, Belgium, Belorusszia, Bolívia, Bosznia-Hercegovina, Botswana (2), Brazília, Bulgária, Chile (4), Ciprus, Costa Rica, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Dominikai Köztársaság (5), Ecuador (5), Egyesült Arab Emírségek, Egyiptom (4), Észak-Korea, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek, Ghána (4), Görögország, Grúzia, Guatemala (3), Hollandia, Honduras (3), Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irak, Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kambodzsa, Kanada, Kazahsztán, Kenya (2), Kína, Kirgizisztán, Kolumbia, Koszovo, Kuba (2), Lengyelország, Lettország, Litvánia, Luxemburg, Macedónia, Magyarország, Makaó, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (5), Myanmar, Nagy-Britannia, Németország, Nepál, Nicaragua (2), Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán (5), Panama (4), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico (1), Románia, El Salvador (4), Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán, Tajvan, Tanzánia, Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago, Tunézia, Türkmenisztán, Uganda, Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay(5), Üzbegisztán, Venezuela (2), Vietnam.*

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 31–42 pontot elért, ezüstérmet a 24–30 pontos, míg bronzérmet a 17–23 ponttal rendelkező tanulók szereztek.

A magyar csapatból

**Haiman Milán** (Stuyvesant High School, New York, USA, 12. o. t.) 40 ponttal *aranyérmet* nyert.

**Zsigri Bálint** (Budapesti XIV. kerületi Szent István Gimnázium, 12. o. t.) 28 ponttal,

**Schrettner Jakab** (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 12. o. t.) 27 ponttal,

**Matolcsi Dávid** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o. t.) pedig 25 ponttal *ezüstérmet* szerzett.

**Szabó Kristóf** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o. t.) 23 ponttal és

**Nagy Nándor** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. o. t.) 22 ponttal *bronzérmet* kapott.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a feladatkiválasztó bizottság tagjaként és koordinátorként működött közre az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a résztvevő 112 ország között a 11. helyen végzett (holtversenyben Ukrajnával). A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1–2. Kína és USA 227, 3. Dél-Korea 226, 4. Észak-Korea 187, 5. Thaiföld 185, 6. Oroszország 179, 7. Vietnam 177, 8. Szingapúr 174, 9. Szerbia 171, 10. Lengyelország 168, **11–12. Magyarország** és Ukrajna **165,** 13. Japán 162, 14. Indonézia 160, 15–16. India és Izrael 156, 17. Románia 155, 18. Ausztrália 154, 19. Bulgária 152, 20. Nagy-Britannia 149, 21. Tajvan 148, 22. Kazahsztán 146, 23. Irán 145, 24. Kanada 144, 25. Franciaország 142, 26. Mongólia 141, 27. Olaszország 140, 28. Peru 137, 29–30. Brazília és Törökország 135.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

*Dobos Sándor* (MD, NN, SK), *Gyenes Zoltán* (NN), *Juhász Péter* (MD, ZB), *Stanislav Katz* (HM), *Kiss Gergely* (MD, SK), *Kiss Géza* (MD, NN, SK), *Mike János* (SJ), *Molnár-Sáska Ildikó* (ZB), *Nikházy László* (NN), *Schultz János* (SJ), *Táborné Vincze Márta* (NN).

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének, továbbá mindazoknak, akik a felkészítésben közreműködtek.

Az olimpiai csapat kijelölése idén is válogatóversenyek formájában történt. A válogatóverseny utolsó, kétnapos részét Kecskeméten rendeztük. Szeretnék köszönetet mondani a kecskeméti Mategye Alapítványnak azért, hogy a versenyt nagyvonalúan vendégül látták.

Az olimpián voltak matematikai és kulturális-turisztikai jellegű kísérő programok is. Az előbbiek között említendő a nagyhírű Ben Green (aki Terry Tao-val együtt bizonyította, hogy prímszámoknak van tetszőlegesen hosszú számtani sorozata) előadása, az utóbbiak között a Stonehenge-hez tett kirándulás.

A következő matematikai diákolimpiát Oroszország rendezi Szentpéterváron, 2020. július 8–18. között.

**Pelikán József**

# A 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

## Első nap

**1. feladat.** Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amelyre minden egész $a$, $b$ esetén teljesül

$$f(2a) + 2f(b) = f\big(f(a+b)\big).$$

**2. feladat.** Az $ABC$ háromszögben $A_1$ a $BC$ oldalon, $B_1$ pedig az $AC$ oldalon fekszik. Legyenek $P$ és $Q$ rendre az $AA_1$ és $BB_1$ szakaszok olyan pontjai, amelyekre $PQ$ párhuzamos $AB$-vel. Legyen $P_1$ a $PB_1$ egyenes egy olyan pontja, amire $B_1$ a $PP_1$ szakasz belsejében fekszik, és $PP_1C\sphericalangle = BAC\sphericalangle$. Hasonlóan legyen $Q_1$ a $QA_1$ egyenes egy olyan pontja, amire $A_1$ a $QQ_1$ szakasz belsejében fekszik, és $CQ_1Q\sphericalangle = CBA\sphericalangle$.

Bizonyítsuk be, hogy a $P$, $Q$, $P_1$, $Q_1$ pontok egy körön fekszenek.

**3. feladat.** Egy szociális hálózatnak 2019 tagja van, közülük némely párok barátai egymásnak. Ha $A$ barátja $B$-nek, akkor $B$ is barátja $A$-nak. A következő típusú esemény előfordulhat többször egymás után, egy időben mindig csak egy ilyen esemény történik:

> Ha $A$, $B$, $C$ olyanok, hogy $A$ barátja $B$-nek is és $C$-nek is, de $B$ nem barátja $C$-nek, akkor barátságot változtathatnak úgy, hogy $B$ és $C$ most már barátai egymásnak, $A$ és $B$, valamint $A$ és $C$ barátsága viszont megszűnik. Az összes többi barátság változatlan marad.

Kezdetben 1010 olyan tag van, amelyek mindegyikének pontosan 1009 barátja van, és 1009 olyan tag, amelyek mindegyikének pontosan 1010 barátja van. Bizonyítsuk be, hogy létezik a fenti típusú eseményeknek egy olyan sorozata, amelyek végén minden tagnak legfeljebb egy másik tag a barátja.

## Második nap

**4. feladat.** Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló $(k,n)$ számpárt, amire

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots\big(2^n - 2^{n-1}\big).$$

**5. feladat.** Bath Bankja érméket bocsát ki, melyeknek egyik oldalán $H$, másik oldalán $T$ betű látható. Harrynek $n$ ilyen érméje van, amelyek előtte balról jobbra, egy sorban vannak elrendezve. Harry ismételten végrehajtja a következő műveletet: ha pontosan $k > 0$ olyan érme van, amin $H$ van felül, akkor megfordítja a balról $k$-adik érmét; máskülönben minden érmén $T$ van felül, és ekkor Harry megáll. Például $n = 3$ esetén a $THT$ sorozatból indulva $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ a lépések sorozata, ami három lépés után megáll.

$(a)$ Bizonyítsuk be, hogy bármi legyen is a kiindulási sorozat, Harry véges sok lépés után megáll.

*Az olimpia honlapja: `https://www.imo2019.uk/`.

($b$) Minden $C$ kiindulási sorozatra jelölje $L(C)$ azt a lépésszámot, ahány lépés után Harry megáll. Például $L(THT) = 3$ és $L(TTT) = 0$. Határozzuk meg $L(C)$ átlagos értékét, amint $C$ végigfut a $2^n$ lehetséges kiinduló sorozaton.

**6. feladat.** A hegyesszögű $ABC$ háromszög, amiben $AB \neq AC$, beírt körének a középpontja $I$. Az $ABC$ háromszög $\omega$ beírt köre a $BC$, $CA$, $AB$ oldalakat rendre a $D$, $E$, $F$ pontokban érinti. A $D$-ből $EF$-re bocsátott merőleges egyenes és az $\omega$ kör második metszéspontja $R$. Az $AR$ egyenes és az $\omega$ kör második metszésponta $P$. A $PCE$ és a $PBF$ háromszögek körülírt köreinek második metszéspontja $Q$.

Bizonyítsuk be, hogy a $DI$ és $PQ$ egyenesek az $AI$-ra $A$-ban állított merőleges egyenesen metszik egymást.

## Olimpiai válogatóversenyek (IMO, MEMO)

A 2020. évi IMO és MEMO versenyekre a csapatok kiválasztása az ideihez hasonlóan válogatóversenyeken történik. A lebonyolítás menete a KöMaL 2016. szeptemberi számában leírtakhoz hasonló, az idei kiírás részletei elérhetők Dobos Sándor honlapján:

`dobos.felhasznalo.fazekas.hu/olimpia/csapat.htm`.

Budapest, 2019. augusztus **Pelikán József, Dobos Sándor**

## Olimpiai előkészítő szakkörök a 2019/2020. tanévben

A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Olimpiai felkészülés az alábbiak szerint történik:

*Budapest:* az első alkalom szeptember 20-án lesz a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnáziumban (Budapest, Horváth M. tér 8.), 14.30-tól, szakkörvezető: *Dobos Sándor.*

*Csongrád megye:* az első szeptember 19-én lesz, utána kéthetente csütörtökön, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében (Szeged, Aradi vértanúk tere 1., I. emelet, Riesz terem), 15.00 és 17.00 között, szakkörvezető: *Kosztolányi József.*

*Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola* veszprémi és szolnoki foglalkozásai 11–12. évfolyamosok számára. Az egyes foglalkozásokra a jelentkezést a diákok egyénileg végezhetik el az Erdős Iskola honlapján: `https://erdosiskola.mik.uni-pannon.hu/`. Az idei első foglalkozások Veszprémben is szeptember 27. és 29. között lesznek.

## EGMO 2019/2020 felhívás*

2020. április 15. és 21. között Hollandiában, Egmond aan Zee-ben rendezik a kilencedik Európai Lány Matematikai Diákolimpiát, az EGMO-t (`www.egmo.org`).

*Az idei versenyről a beszámoló jövő havi számunkban jelenik majd meg.

Jövőre is négyfős csapattal indulhatunk, melynek összetétele 2020. elején derül ki. A válogatás szempontjai: válogatóversenyek (2019 őszén és 2020 elején) – kis mértékben az elmúlt évi is –, országos kifejtős egyéni versenyek (matematika OKTV, Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, Arany Dániel Matematikaverseny), a KöMaL (A és) B pontversenyei és az évközi munka.

A versenyen való sikeres szerepléshez, illetve a kiutazó csapatba kerüléshez is alapvetően nélkülözhetetlen az alapos felkészülés, ezt többféleképpen is szeretnénk segíteni. Év közben időközönként küldünk az érdeklődőknek (tematikus) feladatsorokat; az ezekre küldött megoldásokra személyesen is visszajelzünk, illetve lehet kérdezni is. Emellett az őszi válogatóig legeredményesebb diákok részt vehetnek a téli brit-magyar közös IMO felkészítő táborban. A két válogató összesített eredménye alapján a legeredményesebb diákok részt vehetnek az intenzív EGMO felkészítő hétvégén.

Érdemes minél előbb, akár már kilencedikesként is bekapcsolódni. Minden lány jelentkezését szeretettel várjuk, akit érdekel a versenyrészvétel lehetősége és nem riad vissza attól, hogy ezért komolyabb munkát fektessen be.

Aki szeretne részt venni a válogatásban és felkészülésben, vagy bármilyen kérdése van, írjon minél előbb az `egmo.hungary@gmail.com` címre, vagy jelentkezzen a honlapon leírtak szerint: `http://www.cs.elte.hu/~nagyzoli/EGMO.html`.

**Fekete Panna, Kiss Melinda Flóra, Nagy Zoltán Lóránt**

## Nemzetközi Nyelvészeti Diákolimpia

Indul a Nemzetközi Nyelvészeti Diákolimpia (IOL) 2020 többfordulós, internetes levelező versenye. Örülnénk, ha minél többen csatlakoznátok hozzánk. Oldjátok meg ingyenesen elérhető fordulóink feladatait!

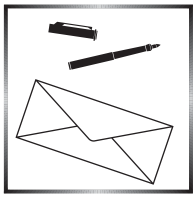
Honlapunk címe: `http://ioling.ppke.hu/`.

A verseny próbára teszi a részt vevők logikai gondolkodását, elemzőképességét. Tedd próbára gondolkodásod egy könnyű feladattal!

Adott hat dátum szuahéli nyelven. A mondatok magyar fordításai véletlenszerű sorrendben állnak. Kösd össze a mondatokat a helyes fordításukkal!

| | |
|---|---|
| 1. tarehe tatu Disemba Jumamosi | A. Október 5., hétfő |
| 2. tarehe tano Oktoba Jumapili | B. Április 2., kedd |
| 3. tarehe pili Aprili Jumanne | C. Október 5., szerda |
| 4. tarehe tano Oktoba Jumatatu | D. Április 4., kedd |
| 5. tarehe nne Aprili Jumanne | E. Október 5., vasárnap |
| 6. tarehe tano Oktoba Jumatano | F. December 3., szombat |

A feladatot készítette: *Ivan Derzhanski*



# Az RSA kulcsgenerálás és a Carmichael-számok kapcsolata 2.*

## 5. A kétkulcsos titkosítás alaptétele, kapcsolata a kétkulcsos titkosítással és az elektronikus aláírással

**Tétel.** *Ha $p$ és $q$ két különböző prímszám és az $e$, $d$ pozitív egészekre $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}$ teljesül, akkor tetszőleges $m$ egész szám esetében igaz, hogy $m^{ed} \equiv m \pmod{pq}$.*

**Bizonyítás.** Az $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}$ feltétel teljesülése konkrétan azt jelenti, hogy $ed-1=k(p-1)(q-1)$, ahol $k$ pozitív egész. Azaz $m^{ed}=mm^{ed-1}= mm^{k(p-1)(q-1)}=m\big[m^{(p-1)}\big]^{k(q-1)}$.

Mivel $m^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$, ha $m$ nem osztható $p$-vel, azért a fenti sorban a $[\ldots]$ részbe 1-et írva a következő kongruenciát kapjuk:

$$m^{ed} \equiv m \pmod{p}, \quad \text{ha} \quad (m,p)=1.$$

Az előbbi gondolatmenetet megismételve $q$-ra:

$$m^{ed} \equiv m \pmod{q}, \quad \text{ha} \quad (m,q)=1.$$

Ha tehát $m$ nem osztható egyidejűleg sem $p$-vel, sem a tőle különböző $q$-val, akkor $m^{ed}-m$ osztható $p$-vel és $q$-val is, vagyis $m^{ed}-m$ osztható $pq$-val is, tehát $m^{ed} \equiv m \pmod{pq}$.

Már csak azt kell megmutatni, hogy ha $m$ osztható $p$-vel vagy $q$-val, akkor is fennáll $m^{ed} \equiv m \pmod{pq}$. Például $m \equiv 0 \pmod{p}$ esetén hatványozással $m^{ed} \equiv 0^{ed} \equiv 0 \equiv m \pmod{p}$.

Tehát a bizonyítandó $m^{ed} \equiv m \pmod{pq}$ állítás minden $m$ egész szám esetében fennáll.

*A fenti tétel alkalmazása a kétkulcsos titkosításra, illetve elektronikus aláírásra*

Kiinduláshoz rendelkezni kell két darab prímszámmal ($p$ és $q$). Mivel az algoritmusban kulcsszerepet játszik az $N=pq$ szorzat, a prímeknek kellően nagyoknak kell lenni ahhoz, hogy az $N$ szám prímtényezős felbontása ne legyen egyszerű (valós időben megoldható) feladat. (Általában $p$ és $q$ 500-2000 bites bináris szám).

Prímszámok kereséséhez, illetve a prímség bizonyításához alapvetően a Fermat-tételt használjuk, s ezért kiemelt jelentősége van a nagy számok (nagy hatványkitevők) hatványainak gyors kiszámolási algoritmusainak. (Az aritmetikai műveletek optimalizálásával itt nem foglalkozunk).

*A cikk első része 2019. májusi számunkban jelent meg és honlapunkon is olvasható: `https://www.komal.hu/cikkek/Kiss_Gabor-Az_RSA_kulcsgeneralas_es_a_Carmichael-szamok_kapcsolata_1.pdf`.

Prímek keresésével, illetve tesztelésével a *„Tanúk" és „Cinkosok"* részben foglalkozunk.

A kiterjesztett euklideszi algoritmussal – $N = pq$ értékéből kiindulva – viszonylag egyszerűen meghatározható egy olyan $e$, $d$ számpár, mely kielégíti az alaptételben említett feltételeket. Egy tetszőlegesen választott, de $\varphi(N)$-hez relatív prím $e$ szám-hoz kell megkeresni $e$ modális inverzét mod $\varphi(N)$. Mivel esetünkben $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$, a $d$ inverz a kiterjesztett euklideszi algoritmussal könnyen meghatározható. Az egyedi $e$, $d$, $N$ számhármas előállítását hívjuk kulcsgenerálásnak. A kulcsgenerálás első lépése mindig az $N$ szám komponenseit alkotó prímek megkeresése, majd ennek függvényében az alkalmas $e$, $d$ értékek kiszámolása. A kulcsgenerálást elvben mindenki – aki titkosan akar kommunikálni – elvégezheti saját számítógépes környezetében azzal a kulcsgeneráló programmal, mely az itt leírt elvek szerint dolgozik.

Az $e$, $d$, $N$ számhármas ismeretében tetszőleges $m < N$ szám (message) átkódolható/titkosítható a $c < N$ (ciphertext) számba, illetve $c$ visszafejthető az eredeti $m$-be az alábbi konvenciók betartásával:

Nevezzük az $(e, N)$ számpárt nyilvános kulcsnak, a $(d, N = pq)$ számpárt pedig privát kulcsnak (nyilvános + privát = kulcspár). Fontos, hogy a kommunikációban résztvevők mindegyike rendelkezzen saját kulcspárral, azaz egyedi $e$, $d$, $N$ számhármassal. Az egymás között kommunikáló partnerek saját privát kulcsukat titokban tartják, a nyilvánosat pedig – nevének megfelelően – minden kommunikációs partner számára ismertté teszik.

Legyen a küldendő szám (üzenet) $m$. A küldő a fogadó nyilvános kulcsával képezi a $c \equiv m^e \pmod N$ maradékot (message $\to$ ciphertext). A fogadó a saját privát kulcsával visszafejtheti $c$-ből az eredeti $m$-et szintén egy maradékképzéssel, mivel $c^d \equiv m^{ed} \equiv m \pmod N$ azaz (ciphertxt $\to$ message). Tehát a kódolt (titkosított üzenetet) kizárólag a kiválasztott fogadó partner tudja megfejteni saját privát kulcsának felhasználásával.

Ha pedig mint küldő, előbb a saját privátkulcsunkat alkalmazzuk az $m$ üzenetre, azaz így képezzük a $c \equiv m^e \pmod N$ maradékot, akkor csak a kapcsolódó nyilvános kulcs tudja visszafejteni az üzenetet, vagyis aki visszafejti a nyilvános kulccsal az üzenetet (ez bárki lehet, mert a nyilvános kulcs mindenkinek elérhető) az biztos lehet abban, hogy csak a megfelelő privátkulcs tulajdonosától jöhetett az üzenet (elektronikus aláírás).

Legyen pl. $p$ és $q$ 1024 bites prím, akkor az $N = pq$ szám 2048 bites[1], azaz 256 byte hosszúságú szám. A fentiek szerint ezzel csak max. 256 byte-os üzenet – melyre $m < N$ is teljesül! – titkosítható. A gyakorlatban a hosszabb fájlokat blokkokra bontjuk, a titkosítás és visszafejtés is természetesen blokkonként fog történni.

Fontosnak tartom megemlíteni, hogy pl. a 256 byte hosszúságú $N$ modulusnál csak az $m < N$ számok esetében korrekt az algoritmus. A helyes visszafejtés érdekében a PLwSecur programban ezt úgy hidaltam át, hogy a titkosításhoz az ere-

[1]Ez csak akkor teljesül, ha $p$ és $q$ első hexadecimális jegye $\geqslant C$, de ez könnyen biztosítható.

deti fájlt 255 byte-os blokkokra (message-ekre) bontottam, majd a keletkező max. 256 byte-os ciphertext-et 256 byte-on tároltam. Visszafejtéskor a 256 byte-os maradékból ismét 255 byte-ra lett a message redukálva.

Megjegyezzük, hogy a szükséges számítások (hatványozások és maradékos osztások) időigényessége miatt azonban nem célszerű valamennyi blokkot a fenti módon titkosítani. A gyorsítás érdekében csak az első blokkot titkosítjuk, de ez célszerűen csak azt a szimmetrikus (pl. véletlenszám) jelszót tartalmazza, mellyel a későbbi blokkokat fogjuk titkosítani, illetve a fogadó fél is ezzel a jelszóval tudja a további blokkokat visszafejteni.

## 6. Prímek keresése, tesztelése (valószínűségi becslés), „Tanúk" és „Cinkosok"

Az előzőekben megmutattuk, hogy a kétkulcsos titkosítás alapvetően az $e$, $d$, $N$ számhármasokon alapul, melyekből a $d$ és $N$ számok nyilvánosak. A titkosítás erősségét tehát az $N = pq$ szorzat biztosítja, azaz olyan $p$ és $q$ prímeket kell keresni, melyek elég nagyok ahhoz, hogy a nyilvánosságra hozott szorzatuk ne legyen könnyen faktorizálható (prímtényezőkre bontható). A gyakorlatban ehhez többszáz jegyű számokat kell használni.

Jelenleg nem ismert olyan („egyszerű") képlet, amely eredményül prímszámokat adna. (A közismert $2^n - 1$ alakú számok (*Mersenne-számok*) között például vannak prímek[2], de pl. $2^{11} - 1 = 2047 = 89 \cdot 23$ nem prím.

Nagy prímszámok kiválasztása próbálgatásokkal történik, majd különböző tesztekkel általában nagy valószínűséggel kijelenthető, hogy a próbálgatással talált ún. *pszeudoprím* szám valóban prímnek tekinthető-e.

Esetünkben a prímkereséshez a próbálgatás eszköze a kis Fermat-tétel, mely szerint minden $p$ prímre és tetszőleges $a$ alapra – ha $(a, p) = 1$, azaz $p$ nem többszöröse $a$-nak – $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

– Kiindulunk egy véletlenszerűen választott a alapból (célszerűen egy ismert prímszámból)
– Majd választunk egy ugyancsak tetszőleges $p$ – de az $(a, p) = 1$ feltételnek megfelelő – páratlan számot (mely binárisan pl. 1000 bit hosszú). Természetesen $p$ összetettségéről még nem tudható semmi.
– Összetettségi vizsgálat. Megvizsgáljuk, hogy az $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ egyenlőség teljesül-e.
  *a)* Ha $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ igaz, akkor $p$-t pszeudóprímnek tekintjük és folytatás prímteszttel.
  *b)* Ha $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ hamis, akkor $p$ csak összetett szám lehet, ezért $p :=$ $:= p + 2$ és visszatérünk ennek a számnak az összetettségi vizsgálatára, ami $(a, p) = 1$ vizsgálatával kezdődik.

[2] A *gyakoriság* 1 ezrelék alatti. 2016. január 7-én fedezték fel a a 49-ik Mersenne-prímet, ez a $2^{74\,207\,281} - 1$ szám, és 22 338 618 számjegyből áll. Jelenleg ez a legnagyobb ismert prímszám. (Wikipédia)

Megjegyezzük, hogy $(a,p)=1$, illetve $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ kiszámítására gyors algoritmusok vannak több száz jegyű számok esetére is. Az $(a,p)$ legnagyobb közös osztó meghatározásához az euklideszi algoritmust használjuk kiterjesztés nélkül.

A tapasztalat alapján 1-2 ezer bites számok esetében általában 1000 próbálkozáson belül mindig akad néhány olyan $p$ szám, melyre igaz az $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ feltétel. Az így talált $p$ számot – mely egy konkrét $a$ alapra épül – az $a$ alaphoz tartozó pszeudoprímnek nevezzük.

Annak eldöntéséhez, hogy egy pszeudoprím valóban prím-e (további) prímtesztet kell alkalmazni. A legbiztosabb megoldás a prímtényezős felbontás lenne, de ez gyakorlatilag – időigénye miatt – végrehajthatatlan.

Az alább ismertetett eljárás (Fermat-teszt[3]) egy $p$ szám összetettségének eldöntéséhez ismételten a kis Fermat-tételt használja, de most az $a$ alapokat váltogatjuk. Mint látni fogjuk, a valódi prímség megállapítására az eljárás elvileg nem alkalmas, mert léteznek olyan összetett számok, melyek minden $(a,p)=1$ $a$ alapra – azaz univerzálisan – pszeudoprímnek bizonyulnak (*Carmichael-számok*).

Dolgozatunk fő célja annak megmutatása, hogy a Fermat-teszt mégis igen hasznos az RSA kulcsgenerálás szempontjából, mert a később ismertetendő CA-tétel miatt a valódi prímeken kívül a prímteszt „gyilkosainak” tekintett Carmichael-számok is – könnyen teljesíthető szűrési feltétellel – felhasználhatók RSA kulcspárok generálásához.

A Fermat-teszt leírásához szükségünk van a következő fogalmakra: A tesztelendő szám legyen $p$. Egy tetszőleges $a$ szám, mely teljesíti az $(a,p)=1$ és $a<p$ feltételeket lehet Tanú vagy Cinkos.

*Tanú:* Ha $a^{p-1}\not\equiv 1 \pmod p$, akkor az $a$ szám TANÚ arra, hogy $p$ összetett szám.

*Cinkos:* Ha $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, akkor az $a$ szám CINKOS $p$ prímségéhez, ugyanis ebből még nem következik $p$ prímsége, de lehet prím is.

$p$ tanúinak száma legyen $T$, $p$ cinkosainak száma pedig $C$, nyilvánvaló, hogy $T+C=\varphi(p)$.

Nyilván igazak a következők:

– Tetszőleges $p$ szám esetén 1 és $p-1$ relatív prím $p$-hez, továbbá mindkettő $p$ cinkosa[4].

– Ha $p$ prím, akkor minden $a<p$ szám – Euler tétele miatt - cinkos, azaz $T=0$ és $C=\varphi(p)$. (*A prímek mellett az összetett Carmichael-számokra is* $T=0$).

– Ha $T>0$ (azaz $p$-nek van tanúja), akkor $p$ csak összetett lehet.

Most pedig megmutatjuk, hogy ha egy $p$ számra $T>0$, akkor $T\geqslant C$ is igaz, azaz ha egy $p$ számnak van tanúja, akkor a $p$-hez relatív prím, $\varphi(p)$ darab szám legfeljebb fele lehet cinkos.

[3]Fermat-prímteszt helyett következetesen Fermat-tesztet használunk, mert a teszt eredménye a prímek mellett összetett számokat is prímnek vélelmez.

[4]$(p-1)\equiv -1\ (p)$, mindkét oldalt felemelve a $(p-1)$-edik (ez páros!) hatványra belátható, hogy $p-1$ cinkosa $p$-nek.

Legyen $t$ a $p$ szám tanúja, $c$ pedig egyik cinkosa (cinkos mindig van!) Vegyük észre, hogy ha $c$ a $p$-nek cinkosa, akkor $tc \pmod p$ tanú. ($(tc)^{p-1} = t^{p-1}c^{p-1} \equiv \equiv t^{p-1} \neq 1 \pmod p$ miatt.) Továbbá, ha $c_1$ és $c_2$ ap-nek két különböző cinkosa, akkor a belőlük származtatott $tc_1$ és $tc_2$ tanúk is különbözők. Ez indirekt úton látható be, ugyanis ha $tc_1 \equiv tc_2 \pmod p$ lenne, akkor $tc_1 - tc_2 = t(c_1 - c_2)$ osztható lenne $p$-vel. Mivel $(t, p) = 1$, ezért csak $c_1 - c_2$ osztható $p$-vel, ami lehetetlen $0 < |c_1 - c_2| < p$ miatt. Tehát a cinkosokból származtatható tanúk miatt $T \geqslant C$ lehet csak.

Ha $T > 0$, illetve következményként $T \geqslant C$, akkor a $T + C$ darab $p$-hez relatív prím (és $p$-nél kisebb) számok között a cinkosok előfordulási valószínűsége $\frac{C}{T+C} \leqslant \leqslant \frac{C}{2C} = \frac{1}{2}$, azaz legfeljebb $\frac{1}{2}$.

E gondolatot folytatva, válasszunk véletlenszerűen pl. 100 db $p$-nél kisebb és $p$-hez relatív prím $a$ számot – és ezek mindegyikére végezzük el az $a^{p-1} \equiv \equiv 1? \pmod p$ vizsgálatot, azonban ügyelve arra, hogy az első tanú felbukkanása után a vizsgálatot rögtön megszakítsuk és próbálkozzunk egy másik $p$-vel. Ha a $p$ szám kiállta az előbbi próbát, elvben két eset lehetséges:

– $p$-nek nincs tanúja, azaz $T = 0$. Ebben az esetben $p$-nek csak *cinkosai* vannak, ezért ha $p$-t *univerzális pszeudóprímnek* tekintjük, garantáltan nem tévedünk.
– $p$-nek van tanúja, azaz $T > 0$. Ebben az esetben annak a valószínűsége, hogy a 100 vizsgált $a$ szám mindegyike *cinkos* legyen kisebb, mint $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 10^{-30}$. Ha tehát ezek után $p$-t *univerzális pszeudóprímnek* tekintjük, a tévedés valószínűsége kisebb, mint $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 10^{-30}$.

(Az előbbi gondolatmenetben említett univerzális pszeudoprímek lehetnek valódi prímek is, de megbújhatnak köztük összetett számok is.)

1910-ben Carmichael találta meg az első olyan összett számot (561), melyre $T = 0$ és $C = \varphi(561)$. A TanúCinkos-kereső programmal azonban számos olyan olyan $p$ *összetett* számot találhatunk, melyekre $T = 0$ és $C = \varphi(p)$. Tehát hiába minősül minden vizsgált, $p$-hez relatív prím cinkosnak, $p$ mégis lehet összetett. Ezeket a $p$ összetett számokat nevezzük univerzális pszeudóprímeknek, vagy Carmichael-számoknak.

## 7. Carmichael-számok definíciója és tulajdonságai

**Definíció.** Azokat az $N$ összetett számokat, melyekre minden $(a, N) = 1$ feltételt kielégítő $a$ alap esetén $a^{N-1} \equiv 1 \bmod N$ teljesül, Carmichael-számoknak nevezzük.

Ilyen számok léteznek, a TanúCinkos-kereső program használatával bizonyíthatóan 43 darab ilyen szám van 1 millió alatt (lásd a számok listáját – a lista előállításának időigénye néhány perc volt). 1994 óta azt is tudhatjuk, hogy végtelen sok Carmichael-szám létezik.

*Csak az arányok érzékeltetéséhez megjegyezzük, hogy az* 1 *milliónál kisebb prímszámok* (1–999 983) *darabszáma* 78 498. *Ehhez jön még* 43 db *Carmichael-szám,* *azaz összesen* 78 541 db *szám esetében a Fermat-teszt mindig „prímet" vélelmez. Az* 1 *millió alatti prímtesztek tévedési aránya tehát* $43/78\,541 \approx 5{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Korselt már 1899-ben kritériumot fogalmazott meg a Carmichael-számokra, bár még nem ismert egyet sem. Eszerint az $N$ szám akkor és csak akkor Carmichael-féle, ha négyzetmentes, és $N$ mindegyik $p$ prímosztójára igaz, hogy $p-1 \mid N-1$ (azaz $p-1$ osztja $(N-1)$-et).

Az alábbi tételek egy Carmichael-szám jellemző tulajdonságait mondják ki:

– $N$ prímtényezős felbontásában a 2-nél nagyobb prímtényezők 1-es kitevővel szerepelhetnek.
– Ha $p$ az $N$ egyik prímtényezője, akkor $p-1 \mid N-1$ (azaz $p-1$ osztja $(N-1)$-et).
– Az $N$ szám nem lehet páros.
– Az $N$ szám nem lehet két páratlan prímszám szorzata.

Bebizonyítjuk továbbá:

– ha az $N$ szám különböző páratlan prímek szorzata, és minden prímtényezőjére teljesül, hogy $p-1 \mid N-1$, akkor $N$ Carmichael-szám.

A továbbiakban $N$ legyen definíció szerinti Carmichael-szám.

**1. tétel.** *$N$ prímtényezős felbontásában a* 2*-nél nagyobb prímtényezők* 1*-es kitevővel szerepelhetnek.*

Indirekt módon tegyük fel, hogy $N = p^k m$ alakú, ahol $p$ páratlan prím, $k \geqslant 2$ és $(m, p^k) = 1$. Legyen $g > 1$ primitív gyök mod $p^k$ ($p = 2$ esetén ez nem lenne garantálható). Tekintsük az $X \equiv g \pmod{p^k}$ és $X \equiv 1 \pmod{m}$ kongruenciarendszert. Mivel $(m, p^k) = 1$, azért $X$ létezik[5] és $(X, N) = 1$ is igaz. Ez utóbbi belátásához vegyük észre, hogy az első kongruencia fennállása miatt $(X, p^k) = 1$, a második kongruencia fennállása miatt – kihasználva *A rend és a primitív gyök fogalma* részben említett észrevételünket, miszerint *ha* $a \equiv b \pmod{m}$*, akkor* $(a, m) = (b, m)$ – $(X, m) = (1, m) = 1$, tehát $(X, N) = (X, p^k m) = 1$ is igaz.

Az $X$ teljesíti a következőket: A Carmichael-szám definíciója miatt $X^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ – ugyanis $(X, N) = 1$, ezért $\varphi(p^k) \mid N-1$. Itt azonban ellentmondásra jutunk, ugyanis $k \geqslant 2$ esetén $p \mid \varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1) \mid N-1$, de ez lehetetlen, mert $p$ egyidejűleg nem lehet osztója $(N-1)$-nek és $N$-nek is.

**2. tétel.** *Ha $p$ az $N$ egyik prímtényezője, akkor $p-1 \mid N-1$.*

A $p = 2$ esetében az állítás triviálisan teljesül – bár, mint később látni fogjuk, $N$ nem lehet páros szám. Így az egyik páratlan $p$ prímet kiválasztva feltételezhetjük, hogy $N = pm$ alakú, ahol $(m, p) = 1$. Legyen $g$ primitív gyök mod $p$. Tekintsük az $X \equiv g \pmod{p}$ és $X \equiv 1 \pmod{m}$ kongruenciarendszert. Mivel $(m, p) = 1$, létezik ilyen $X$, és $(X, N) = 1$.

[5]Ez következik abból, hogy az $ax + by = 1$ diofantoszi egyenletnek csak akkor van megoldása, ha $(a, b) = 1$, továbbá ekkor az $ax + by = c$ diofantoszi egyenletnek is van megoldása.

A Carmichael-szám definíciója miatt $X^{N-1} \equiv 1 \pmod N$, így nyilván $X^{N-1} \equiv$ $\equiv 1 \pmod p$, ezért $p-1 = \varphi(p) = o_p(X) \mid N-1$.

**3. tétel.** *Az $N$ szám nem lehet páros.*

Legyen $N$ egyik páratlan prímosztója $p$, ekkor a 2. tétel szerint $p-1 \mid N-1$. Itt $p-1$ páros, így $N-1$ is páros, tehát $N$ páratlan.

**4. tétel.** *Az $N$ szám nem lehet két páratlan prímszám szorzata.*

Indirekt módon tegyük fel, hogy $N = pq$ alakú. Mivel $p-1 \mid N-1$ fennáll, azért

$$\frac{pq-1}{p-1} = \frac{pq-q+q-1}{p-1} = q + \frac{q-1}{p-1}$$

is egész, tehát $\frac{q-1}{p-1}$ is egész szám. A $q-1 \mid N-1$ fennállásából pedig belátható, hogy $\frac{p-1}{q-1}$ is egész. A reciprokok csak akkor lehetnek egészek, ha mindkettő értéke 1, azaz $p = q$. A $p = q$ eset azonban az 1. tétel miatt nem lehetséges, tehát az $N$ szám nem lehet két tényezős.

A továbbiakban $N$ legyen különböző páratlan prímek szorzata, és minden $p$ prímtényezőjére $p-1 \mid N-1$.

**5. tétel.** *Ha $N$ eleget tesz a fenti feltételeknek, akkor $N$ Carmichael-szám.*

Bármelyik $p$ prímtényezőre $k = \frac{N-1}{p-1}$ egész szám. Ha $(a, N) = 1$, akkor erre az $a$ alapra a kis Fermat-tétel szerint $a^{N-1} \equiv a^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod p$. Mivel ez a kongruencia mindegyik $p$ prímtényezőre fennáll, azért a modulusok szorzatára is, így $a^{N-1} \equiv 1 \pmod N$ is igaz.

## 8. A kétkulcsos titkosítás alaptételének egy fontos általánosítása (CA-tétel)

Az eredeti – korábban bebizonyított állítás – a következő: Ha $p$ és $q$ két különböző prímszám, és az $e$, $d$ pozitív egészekre $ed \equiv 1 \bmod \varphi(pq)$ teljesül, akkor tetszőleges $m$ egész számra $m^{ed} \equiv m \pmod{pq}$.

**Az általánosítás a következő:**

*Legyen $N$ négyzetmentes szám – azaz egymástól különböző – $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prímek szorzata. Ha az $e$, $d$ pozitív egészekre teljesül az $ed \equiv 1 \big(\bmod \varphi(N)\big)$ feltétel, akkor tetszőleges $m$ egész számra $m^{ed} \equiv m \pmod N$).*

**Bizonyítás.** Ugyanaz, mint két prím szorzatának az esetében.

Ennek az általánosításnak az a jelentősége, hogy a kulcsgeneráláshoz felhasználhatjuk a Fermat-tesztet kiállt valamennyi számot, függetlenül attól, hogy az valódi prím vagy összetett Carmichael-szám. Az $N$ szorzat négyzetmentességének biztosításához elegendő a felhasznált számok páronkénti relatív prímsége, ami könnyen biztosítható.

Eddig még nem vizsgáltuk, hogy az $ed \equiv 1 \bmod \varphi(N)$ feltétel hogyan teljesíthető. Itt $\varphi(N) = (p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)$. A kiterjesztett euklideszi algoritmussal

– indulásként például egy kisebb prímet választva $e$ értékének – igen gyorsan meghatározható $d$ értéke – ha létezik megoldás. Ha nincs megoldás, akkor egy másik prím értéket választhatunk stb.

## 9. Kulcspárgenerálás összetett számokból

A CA-tétel egyik fontos következménye, hogy az RSA kulcspárok generálását prímek mellett speciális összetett számokkal is meg lehet csinálni, mégpedig pont azokkal, melyek a Fermat-teszt prímvizsgálatát „meggyilkolták".

A PLwSecur (v2.2) változatában 256 bites, illetve 512 bites prímeket használunk, nevezetesen

– az 512 bites kulcspár 2 db 256 bites prím szorzatából,

– a 768 bites kulcspár egy 256 bites és egy 512 bites prím szorzatából,

– az 1024 bites kulcspár 2 db 512 bites prím szorzatából

van generálva.

Bár a program jelenlegi változata max. 2048 bites kulcspárokat is tud kezelni, az alkalmazott programtechnika (Delphi kód, de nincsenek beágyazott assembler gyorsítások) nem alkalmas hosszabb kulcspárok generálására észszerű időn belül.

A CA-tétel alapján azonban lehetőség nyílik 1536, 2048 bithosszúságú kulcsok generálására 512 bites prímek felhasználásával. A kulcsgenerálás folyamata a következő lehet:

1. A végcéltől függően generálni kell pl. 3-4 darab 512 bites prímet. Ezeket előbb szigorú prímtesztnek kell alávetni (pl. 100 erősségű Fermat-teszt). Mivel ez valószínűségi teszt, ezért a valódi prímeken kívül – nagy valószínűséggel – csak az összetett Carmichael-számok bizonyulhatnak „prímnek". (A *Prímek keresése, tesztelése* részben megmutattuk, hogy 100 darab sikeres „cinkostalálat" után annak valószínűsége, hogy $p$ ne univerzális pszeudóprím legyen kisebb, mint $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 10^{-30}$.)
2. Az így talált számokat – beleértve az esetleges Carmichael számokat is – jelöljük $c_1, c_2, \ldots, c_n$-nel. A CA-tétel miatt kulcsgeneráláshoz csak akkor használhatók, ha szorzatuk négyzetmentes. Ehhez elegendő azt biztosítani, hogy a számok páronként relatív prímek legyenek. Ha valamelyiknél sérül a relatív prímség, akkor helyette másik számot kell generálni az előző pont szerint.
3. A fenti előkészítések után az $N = c_1c_2 \ldots c_n$ szorzat értéke mellé meg kell határozni $Q = (c_1 - 1)(c_2 - 1) \ldots (c_n - 1)$ értékét is, majd az $ed \equiv 1 \bmod Q$ egyenletnek eleget tevő $e$, $d$, $N$ hármasból képezhető a kulcspár. Vegyük észre, hogy a $c_i$ számok prímtényezős felbontásában szereplő valamennyi $p_j$ prímre fennáll, hogy $p_j - 1 \mid c_i - 1$. Ezért a CA tétel bizonyításakor az $ed \equiv 1 \bmod Q$ feltétel is elegendő.

Természetesen tisztában kell lenni azzal, hogy pl. 4 darab 512 bites számból származtatott 2048 bites kulcspár kevésbé biztonságos (elméletileg könnyebben faktorizálható), mint ha ugyanezt 2 darab 1024 bites számból származtattuk volna. Ugyanakkor a kulcsgenerálás időigénye *nagyságrendekkel rövidebb* lesz. A kulcspár használatakor az encryt/decrypt időigényét az $e$, $N$ (nyilvános), illetve $d$, $N$

(privát) számpárok mérete határozza meg, ami már teljesen független az $e$, $d$, $N$ számok előállításának módjától, azaz itt a futási időben változás nem várható.

Megjegyzendő végül, hogy ha a prímtesztelésnél a nagyon nagy valószínűséggel helyes eredmény helyett a biztosan jó válaszhoz ragaszkodunk, akkor immár ez az igény is kielégíthető – az algoritmus bonyolultságának növekedése árán. Mindezt Agrawal, Kayal és Saxena 2002-ben publikált eredménye biztosítja.

1 *millió alatti Carmichael-számok* (43 db)

| Hex | Dec | Prímfelbontás | Hex | Dec | Prímfelbontás |
|---:|---:|---:|---:|---:|---:|
| 231 | 561 | $3\cdot 11\cdot 17$ | 3DAB9 | 252 601 | $41\cdot 61\cdot 101$ |
| 451 | 1105 | $5\cdot 13\cdot 17$ | 44011 | 278 545 | $5\cdot 17\cdot 29\cdot 113$ |
| 6C1 | 1729 | $7\cdot 13\cdot 19$ | 47E09 | 294 409 | $37\cdot 73\cdot 109$ |
| 9A1 | 2465 | $5\cdot 17\cdot 29$ | 4CDC5 | 314 821 | $13\cdot 61\cdot 397$ |
| B05 | 2821 | $7\cdot 13\cdot 31$ | 51949 | 334 153 | $19\cdot 43\cdot 409$ |
| 19C9 | 6601 | $7\cdot 23\cdot 41$ | 53251 | 340 561 | $13\cdot 17\cdot 23\cdot 67$ |
| 22CF | 8911 | $7\cdot 19\cdot 67$ | 61699 | 399 001 | $31\cdot 61\cdot 211$ |
| 2959 | 10 585 | $5\cdot 29\cdot 73$ | 641B9 | 410 041 | $41\cdot 73\cdot 137$ |
| 3DE1 | 15 841 | $7\cdot 31\cdot 73$ | 6DA29 | 449 065 | $5\cdot 19\cdot 29\cdot 163$ |
| 729D | 29 341 | $13\cdot 37\cdot 61$ | 775B1 | 488 881 | $37\cdot 73\cdot 181$ |
| A051 | 41 041 | $7\cdot 11\cdot 13\cdot 41$ | 7D1CD | 512 461 | $31\cdot 61\cdot 271$ |
| B641 | 46 657 | $13\cdot 37\cdot 97$ | 819C1 | 530 881 | $13\cdot 97\cdot 421$ |
| CD99 | 52 633 | $7\cdot 73\cdot 103$ | 86F11 | 552 721 | $13\cdot 17\cdot 41\cdot 61$ |
| F519 | 62 745 | $3\cdot 5\cdot 47\cdot 89$ | A04D9 | 656 601 | $3\cdot 11\cdot 101\cdot 197$ |
| F9E5 | 63 973 | $7\cdot 13\cdot 19\cdot 37$ | A0D71 | 658 801 | $11\cdot 13\cdot 17\cdot 271$ |
| 12661 | 75 361 | $11\cdot 13\cdot 17\cdot 31$ | A3951 | 670 033 | $7\cdot 13\cdot 37\cdot 199$ |
| 18AED | 101 101 | $7\cdot 11\cdot 13\cdot 101$ | B6C71 | 748 657 | $7\cdot 13\cdot 19\cdot 433$ |
| 1C4D1 | 115 921 | $13\cdot 37\cdot 241$ | C97B1 | 825 265 | $5\cdot 7\cdot 17\cdot 19\cdot 73$ |
| 1ED09 | 126 217 | $7\cdot 13\cdot 19\cdot 73$ | CCA39 | 838 201 | $7\cdot 13\cdot 61\cdot 151$ |
| 27A61 | 162 401 | $17\cdot 41\cdot 233$ | D0369 | 852 841 | $11\cdot 31\cdot 41\cdot 61$ |
| 2A031 | 172 081 | $7\cdot 13\cdot 31\cdot 61$ | F3901 | 997 633 | $7\cdot 13\cdot 19\cdot 577$ |
| 2E02D | 188 461 | $7\cdot 13\cdot 19\cdot 109$ | | | |

**Kiss Gábor**

## Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

### I. rész

**1.** Dani kerékpárversenyre készül. Először hegynek felfelé, utána vízszintes terepen, majd lejtőn lefelé hajtja a biciklit, ezután visszafelé ugyanezen az útvonalon hajt végig. Lejtőn lefelé 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, vízszintes terepen 40 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, míg hegynek felfelé 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

állandó sebességgel képes haladni. Az odafele utat 1,75 óra alatt, míg a visszafele utat 2,25 óra alatt tette meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok, ha oda-vissza összesen 130 km-t biciklizett?

(Közben sehol sem állt meg, a visszafordulás időveszteség nélkül zajlódik le.) (*13 pont*)

**2.** Tekintsük a következő állításokat.

$A$: Meg tudunk úgy adni végtelen sok prímet, hogy bármely kettő összege ne legyen prím.

$B$: Ha az $a_n^2$ sorozat konvergens, akkor $a_n$ is konvergens.

$C$: Ha öt különböző természetes szám összege osztható öttel, akkor öttel osztva különböző maradékot adnak.

*a*) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk. (*8 pont*)

*b*) Fogalmazzuk meg a $C$ állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

**3.** *a*) Döntsük el, hogy az implikáció asszociatív művelet-e, azaz tetszőleges $A$; $B$; $C$ kijelentések esetén fennáll-e, hogy $(A \to B) \to C = A \to (B \to C)$. (*4 pont*)

*b*) Határozzuk meg azon $P(x;y)$ pontok halmazát a derékszögű koordinátarendszerben, amelyek koordinátáira igaz, hogy $PA^2 + PB^2 = 22$, ahol $A(1;2)$ és $B(3;0)$. (*8 pont*)

**4.** Legyen $A$ a $2^x + 2^{1-x} \leqslant 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza, $B$ pedig az alábbi két függvény értékkészletének közös része:

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(2019\pi x) \quad \text{és} \quad g(x) = 4x^2 - 4x + \frac{3}{2}.$$

*a*) Határozzuk meg az $A$ halmazt. (*5 pont*)

*b*) Határozzuk meg a megadott függvények értékkészletét és a $B$ halmazt. (*7 pont*)

*c*) Hány eleme van az $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ halmaznak, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli? (*2 pont*)

## II. rész

**5.** *a*) Egyik este Anna, Bea, Csilla, Dóra és Emese elmentek vacsorázni a közeli pizzázóba. Mindannyian másféle pizzát rendeltek. A pincér még új, így a rendelt ételeket véletlenszerűen osztotta ki a lányoknak (de azokat hozta ki, amiket rendeltek). Jelölje $X$ azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hányan kapták a saját rendelésüket. Határozzuk meg $X$ várható értékét. (*8 pont*)

*b*) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$2^n - 1 = m^2. \qquad (8 \text{ pont})$$

**6.** *a*) Egy derékszögű háromszög beírt és köré írt körének sugarát jelölje $r$ és $R$. Mekkorák a háromszög oldalai, ha tudjuk, hogy $r + R = 31$ és $rR = 150$? (*8 pont*)

*b*) Egy szabályos ötszög mindegyik oldalát kiszínezzük három adott szín valamelyikével. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha két színezést nem tekintünk különbözőnek, ha forgatással egymásba vihetők? (*8 pont*)

**7.** *a*) A lappföldi Mikulásnak két rénszarvasa van: Vágta és Éppenhogycsak. Ha valamelyik nap Vágta egyedül $x$ sebességgel ($x > 1$) húzná a szánt, akkor Éppenhogycsakot melléfogva az még $1/x$ sebességet tud hozzáadni. A Mikulás már öreg, emiatt ijedős. Minél gyorsabban megy a szán, annál többször fogja vissza az állatokat. A precíz mérések szerint, ha Vágta $x$ sebességgel húzná a szánt, akkor ez éppen $\ln x$ sebességcsökkenést eredményez. Egyszer egy ellenőrzésnél azzal vádolják meg a Mikulást, hogy lassan hajtott. Lappföldön a lassúhajtás határa 7/4. Meg tudja-e védeni magát a Mikulás?

(Használjuk fel, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.) (*9 pont*)

*b*) A sakk egy érdekes változata az ún. Fischer random sakk, melyet Robert Fischer amerikai világbajnok hozott létre 1996-ban. A lényegi eltérés a tisztek (király (K), vezér (V), 2 bástya (B), 2 huszár (H), 2 futó (F)) elhelyezkedésében rejlik.

Az alapállás szabályai:

- A király a bástyák között foglal helyet.
- A futók ellentétes színű mezőn állnak.

A felsorolt tiszteket az alábbi $1 \times 8$-as táblázatba kell elhelyezni (az *ábrán* egy helyes kitöltés látható):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | H | B | F | H | K | B | V |

Az azonos minőségű tisztek között (pl. két huszár stb.) csak a futóknál van megkötés arra, hogy szükségszerűen különböző színen kell állniuk.

Mutassuk meg, hogy 960 megengedett alapállás lehetséges a Fischer random sakkban. (*7 pont*)

**8.** *a*) Egy tizenkét elemű, egész számokból álló mintából ismerünk hét értéket: 4; 4; 4; 5; 7; 9; 13. Tudjuk, hogy a minta egyetlen módusza 5 és a minta átlagának szórás sugarú környezete három tizedesjegyre kerekítve $]\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma[ = ]3{,}292; 8{,}708[$. Határozzuk meg a minta hiányzó öt elemét. (*8 pont*)

*b*) Egyenlő szárú háromszög szára 13 cm, alapja 24 cm. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának a háromszög köré írható kör középpontjától való távolságát. (*8 pont*)

**9.** *a*) Bence nemrég tanulta az iskolában a szinusztételt és a koszinusztételt. Sajnos rosszul emlékezett rájuk és azokat az alábbi módon jegyezte meg (a jelölések a szokásosak):

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \sin\gamma \quad \text{és} \quad \frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyre igazak a Bence által megtanult összefüggések? (*7 pont*)

*b*) Határozzuk meg az $a$; $b$; $c$ egész paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola az alábbi feltételek mindegyikét teljesítse.

1. $f'(3) = -11$.
2. $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.
3. Csúcspontja illeszkedik az $y = \frac{1}{2}x + 1$ egyenletű egyenesre. (*9 pont*)

**Fridrik Richárd**
Szeged

## Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2019–2020-as tanévre (2019 szeptemberétől 2020 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 6-nál nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

*Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.*

*A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at:* `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonként 950 Ft-ért megvásárolható a szerkesztőségben.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2019–2020-as tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

## Versenykiírás* a KöMaL 2019–2020. évi pontversenyeire

A most induló pontversenyek 2019 szeptemberétől 2020 májusáig tartanak, havonta az újonnan kitűzött feladatcsoportok megoldásait lehet beküldeni.

*Kérjük, hogy azok is figyelmesen olvassák el a versenykiírást, akik tavaly már részt vettek valamelyik versenyünkben.

**Kedves Versenyzőnk!**

Matematikából, fizikából és informatikából, összesen 21 kategóriában indítunk különféle nehézségű pontversenyeket. Ezek a versenyek 9 hónapon keresztül, 2019 szeptemberétől 2020. június elejéig tartanak. Minden hónapban új feladatokat tűzünk ki, és a megoldásokat a következő hónap elejéig küldheted be. A verseny végeredményét 2020. szeptemberi számunkban hirdetjük ki. A díjakat jövő ősszel, a KöMaL Ifjúsági Ankéton adjuk át.

Pontversenyeinkben a részvétel a 2019/2020-as tanévben is térítésmentes. Kérjük azonban versenyzőink szüleit, hozzátartozóit, vagy az őket támogató intézményeket, cégeket, hogy előfizetésükkel és adományaikkal segítsék Lapunk fennmaradását.

## Nevezés a versenyre

Versenyeinkben minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló részt vehet.

Az Európai Unió Általános Adatvédelmi Rendelete (GDPR) értelmében szülői engedély szükséges a 16 évesnél fiatalabb versenyzőink adatainak nyilvántartásához. Az ő esetükben egy szülői nyilatkozatra is szükség van, melyet a regisztráció során lehet megadni. Amennyiben a szülői nyilatkozat nem érkezik meg, a versenyző nem szerepelhet az eredménylistában. Adatkezelési szabályzatunk a `https://www.komal.hu/info/adatkezeles.h.shtml` címen olvasható.

**Regisztráció**

Ha még soha nem vettél részt a KöMaL versenyeiben, az első lépés a *regisztráció a honlapunkon* (`https://www.komal.hu/u?a=reg`). A regisztráció során alapvető adatokat (név, születési dátum, iskola, osztály, e-mail cím) kérünk. A későbbi bejelentkezéshez szükséges jelszavadat e-mailben küldjük el.

A nagyon gyakori családnevű versenyzőknek (Horváth, Kiss, Varga stb.) javasoljuk, hogy válasszanak egy háromjegyű jelzőszámot, amit második vezetéknévként használnak (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük, hogy mind a regisztrációkor, mind pedig a tanév során beküldött dolgozataidon is minden esetben az így kibővített nevet használd.

A sikeres regisztráció után adhatod meg további adataidat (pl. levelezési cím: ide szoktuk küldeni az érettségizettek oklevelét; felkészítő tanárok neve), és nyilatkozhatsz a részletes pontszámok nyilvánosságáról vagy egyes konkrét versenyekben való részvételről.

Ha korábban már regisztráltál, akkor nincs szükség újabb regisztrációra; a tavalyi jelszavadat továbbra is használhatod; ugyanakkor szükséges lesz a személyes beállításaid áttekintése, felülvizsgálata.

Az egyes pontversenyekre az első dolgozat beküldésével nevezhetsz be.

A versenyekbe a tanév során később is be lehet kapcsolódni.

**FONTOS! A versenyben csak a regisztráció után beküldött megoldásokat értékeljük! Regisztráció nélkül beküldött megoldásokat utólag sem veszünk figyelembe!**

**Az osztályok számozása**

A KöMaL versenyeiben az osztályokat 1-től 12-ig számozzuk. Lehet, hogy a számozás nem azonos az iskolában használt számmal. Azok számítanak 12. osztályosnak, akik most kezdik az érettségi vizsga előtti utolsó évet. 11. és 10. osztályosnak számítanak azok, akik várhatóan 2021-ben, illetve 2022-ben fejezik be a középiskolát.

Azok, akik $8+5$ éves képzésben vesznek részt, például a nyelvi előkészítő osztályok tanulói, két egymás utáni évben is 9. osztályosnak számítanak. Kérjük, ha az osztályod sorszáma nem 1-gyel nőtt tavalyhoz képest, ezt jelezd a szerkesztőségnek e-mailben.

**A regisztráció módosítása**

A regisztráció után az azonosításhoz szükséges adataidat (név, iskola, osztály, e-mail cím) önállóan nem módosíthatod. Ha ezek megváltoztak, kérjük, hogy fordulj e-mailben a szerkesztőséghez.

Mindenkit óvunk a regisztráció önkényes megismétlésétől, a többszörös regisztrációtól. Nincs olyan helyzet, amikor a többszörös regisztráció segítene; csak még nagyobb zavart okoz. (Ugye nem szeretnél kétszer szerepelni a pontversenyben, feleakkora pontszámmal?)

**Arcképek**

Ha szeretnéd, hogy fényképed megjelenjen honlapunkon a pontverseny eredményében, küldd el a szerkesztőségnek e-mailben. Ha lehet, válassz világos, egyszínű hátteret. A képeket többnyire átméretezzük és megfelelő méretűre vágjuk, ezért érdemes nagyobb felbontást használni.

## Matematika versenyek

Négyféle versenyt indítunk, növekvő nehézségi sorrendben **K**, **C**, **B** és **A** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de K-ban és B-ben egyszerre nem. Ha kilencedik osztályos vagy, akkor a személyes beállításaid között nyilatkozhatsz, hogy melyik versenyben szeretnél részt venni.

Mindegyik versenyünkre érvényes, hogy **egy feladatra csak egy megoldást értékelünk.**

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük.

**K**-*jelű matematika feladatok* – az ABACUS és a KöMaL Közös pontversenye Kilencedikes Kezdőknek

A K-pontversenyben csak kilencedik osztályosok indulhatnak. Azoknak ajánljuk, akik még csak most ismerkednek a KöMaL-lal. Szeptembertől márciusig hét fordulóban, havonta öt feladat jelenik meg; ezek közül három feladat az ABACUS pontversenyével közös. Mindegyik feladat teljes megoldása 6 pontot ér. A feladatokat az *ABACUS matematikai lapok* bocsátja a KöMaL rendelkezésére.

Az ABACUS pontversenyében továbbra is az általános iskolák 3–8. osztályos tanulói vehetnek részt.

**C**-*jelű matematika gyakorlatok*

A C-pontverseny gyakorlatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a B és az A kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat, azok találhatnak itt kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein, vagy emelt szintű érettségit kívánnak tenni matematikából.

A gyakorlatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más részük azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–12. évfolyamosok küldhetnek be megoldást. Minden dolgozatra legfeljebb 5 pont kapható.

A C-pontversenyt három korcsoportban értékeljük: 1–8., 9–10., illetve 11–12. osztályosok.

**B**-*jelű matematika feladatok*

A B-pontversenyben havonta összesen nyolc feladatot tűzünk ki, de havonta mindenkinek **legfeljebb hat** megoldását számítjuk be a pontversenybe (amelybe azonban először a nem versenyszerűeket számítjuk be, lásd lejjebb). Az eredményes versenyzéshez tehát nincs szükség valamennyi feladat megoldására; ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot.

A B-feladatok sorrendje megfelel az iskolai tananyagnak: egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak. A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (többnyire 3–6).

A B-pontverseny eredményét öt korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11., illetve 12. évfolyamokban.

**A**-*jelű nehezebb matematika feladatok*

Az A-pontverseny a legfelkészültebb diákok számára jelent kihívást. Azoknak ajánljuk, akik tudományos kutató pályára vagy nemzetközi versenyekre készülnek.

Havonta két vagy három A-feladatot tűzünk ki, mindegyik feladatra legfeljebb 7 pont kapható. Az A-verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek.

## Fizika versenyek

Háromféle fizika versenyt indítunk: **M**, **G** és **P** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de a G- és a P-pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. A legfeljebb 10. osztályosoknak honlapunkon, a személyes beállításaik között kell nyilatkozniuk, hogy a P és G versenyek közül melyikben kívánnak részt venni.

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük.

**M**-*pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta egy mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6-6 pontot lehet szerezni.

A mérés elvégzéséhez szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A segítő személy adatait a mérési jegyzőkönyv elején a versenyző adatai mellett tüntessétek fel. Idén első alkalommal (kísérleti jelleggel) megengedjük, hogy a mérést két versenyző közösen, mérőpárban végezze el. A mérőpár tagjai – akik járhatnak különböző iskolába és különböző évfolyamokba – egymástól függetlenül nevezzenek be az **M** pontversenybe. A mérésük jegyzőkönyvét elegendő 1 példányban beküldeni, de annak fejlécén minden hónapban szerepeljen mindkettőjük neve, iskolája, osztálya, e-mail címe. A mérési jegyzőkönyvért járó pontszámot a mérőpár mindkét tagja külön-külön megkapja.

**G**-*jelű fizika gyakorlatok*

A G-pontversenyben legfeljebb 10. osztályosok vehetnek részt. Azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a P-feladatokat. Többnyire az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat találnak a versenyzők, így azok is eséllyel indulhatnak, akik még nem rendelkeznek feladatmegoldó rutinnal, de a gyakorlatok megoldásával és beküldésével felkészülhetnek arra, hogy a következő években eredményesen szerepelhessenek a P-pontversenyben.

Minden hónapban négy G-gyakorlatot tűzünk ki, az elérhető pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött gyakorlatok közül, de **havonta legfeljebb három** feladat megoldását (először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe. A G-pontversenyt három kategóriában (legfeljebb 8. évfolyam, 9., 10. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük.

**P**-*jelű fizika feladatok*

Havonta kb. tíz elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. **Az 1–8. évfolyamosoknak havonta legfeljebb három, a 9–12. évfolyamosoknak legfeljebb öt megoldását** számítjuk be a pontversenybe (azonban először a nem versenyszerűeket).

Az elméleti versenyt korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük.

## Informatika versenyek

**I**-*pontverseny* – informatika alkalmazási és programozási feladatok

Havonta három **I** jelű és egy **I/S** jelű feladatot tűzünk ki. A feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a középiskolai tanulmányokra támaszkodik. Alapvető célunk, hogy e feladatok segítsék a felkészülést az informatika versenyekre és az emelt szintű érettségire. Minden hónapban a négy kitűzött feladatból a három legmagasabb pontszámot elért feladat pontszámát számítjuk be az I pontversenybe.

Az I jelű feladatok programozási és informatika alkalmazói feladatok. A feladatok egyike jellegében és formájában is lényegében megegyezik az érettségin kitűzött feladatokkal, ezt az (É) betűvel jelezzük a feladat sorszáma mellett. Versenyzőink ezen feladatok megoldásával a vizsgára való felkészülést is gyakorolhatják.

Az I/S jelű feladatok az I jelű programozási feladatoknál nehezebb, de az S jelűeknél könnyebb programozási feladatok. A megoldáshoz szükséges ismeretek és algoritmusok megtalálhatók a `http://tehetseg.inf.elte.hu/nemes` és a `https://www.oktatas.hu/kozneveles/tanulmanyi_versenyek/oktv_kereteben/aktualis_versenyidoszak` oldalakon.

**S**-*pontverseny* – nehezebb programozási feladatok

Az **S** pontverseny egy **S**-jelű nehezebb programozási feladatból és az I-pontversenyben is résztvevő **I/S** feladatból áll. Mindkét feladat a programozási versenyekre való felkészülést szolgálja. A megoldáshoz szükséges ismeretek és ajánlott algoritmusok körét a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiákon alkalmazott angol nyelvű leírás (IOI Syllabus) tartalmazza, lásd `https://ioinformatics.org/files/ioi-syllabus-2018.pdf`. Az S és I/S feladatok értékelésénél az eredmény helyességén kívül azt is figyelembe vesszük, hogy az algoritmusok mennyire hatékonyak, nagyméretű bemenő adatok esetén is lefutnak-e a megadott időkorláton belül.

## A feladatok megjelenése

Új feladatokat havonta, szeptembertől májusig tűzünk ki. A feladatokat megtalálod nyomtatott számunkban és honlapunkon.

Honlapunkon a feladatokat, szeptember kivételével, az adott hónap 28. napján hozzuk nyilvánosságra. Előfizetőink azonban a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg, azonnal elérhetik a feladatok szövegét, és elkezdhetik a munkát. Amennyiben előfizettél a KöMaL-ra, a személyes beállításaid között add meg előfizetői kódodat. Az előfizetői azonosítót megtalálod a szeptemberi szám címlapjára ráragasztott címkén.

Azok az előfizetőink, akik (például életkoruknál fogva) nem versenyzőink, regisztráció és az előfizetői kód megadása után, a versenyzőkkel együtt szintén elérhetik a feladatok szövegét.

Egy előfizetői kódot csak egy személy használhat.

## A dolgozatok tartalma

Kérjük, tanulmányozd a korábbi számainkban és honlapunkon megjelent megoldásokat, ezek sokat segíthetnek annak megértésében, hogy milyen formát és részletességet várunk el a beküldött megoldásoktól.

**Matematika és fizika elméleti megoldások**

A megoldás leírása azt jelenti, hogy az olvasót végigvezeted a megoldásod lépésein. Törekedj a rövid, olvasható leírásra. Próbáld még egyszer átgondolni a lépések sorrendjét, és lerövidíteni a megoldást. A gondos leírás sok időt igényel; ne hagyd az utolsó pillanatra.

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár; puszta eredményközlésért nem adunk pontot. A kimondott állításokat igazolni kell. Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el. Közismert tételekre (pl. Menelaosz-tétel, Hölder-egyenlőtlenség stb.) elegendő a nevükkel hivatkozni, egyéb esetekben ki kell mondani a felhasznált tételt, és fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám vagy internet-cím). Tételekre való hivatkozáskor azt is meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Többször előfordult már, hogy egy-egy feladat szerepelt valamely példatárban, vagy megtalálták az interneten. Arra is láttunk példát, hogy egy folyóiratcikkben, vagy éppen a KöMaL egy korábbi feladatában a feladatban kitűzöttel lényegében ekvivalens, vagy annál általánosabb állítás bizonyítása szerepelt. Célunk továbbra is versenyzőink problémamegoldó képességének fejlesztése, nem pedig a keresőprogramok tesztelése, ezért **nem adunk pontot azokra a dolgozatokra, amelyek csak a megoldás helyét közlik, vagy azt mutatják meg, hogy a feladat**

**egy nehezebb tétel speciális esete vagy triviális következménye; a végeredményhez vezető megoldást részletesen le kell írni.**

Ha a megoldáshoz könyvekben vagy az interneten talált írásokat használsz fel, és ezekből idézel, tüntesd fel a felhasznált forrásokat.

A hosszabb, összetettebb gondolatmeneteket érdemes tagolni, részekre bontani; használj, bekezdéseket, részeket, címeket és alcímeket. A különböző segédállításokra, képletekre és ábrákra könnyebb hivatkozni, ha megszámozod.

A geometria feladatok megoldásának fontos részei az ábrák, amelyeken követni és ellenőrizni lehet a lépéseket. Mindig rajzolj ábrát, az ábra nélküli megoldásokat nem tekintjük teljesnek. Bonyolultabb ábrák esetén az egyes geometriai objektumokat szövegesen is definiáld (pl. „legyen $P'$ a $P$ pont tükörképe az $e$ egyenesre"). Elektronikus beküldés esetén ügyelj a megfelelő felbontásra. A felbontás akkor megfelelő, ha a számítógép képernyőjén elfér, és a fontos részletek is jók kivehetőek. A jó ábra mérete többnyire 500–1000 pixel között lehet.

A matematika példák megoldásaként számítógépes programokkal – beleértve az olyan online szolgáltatásokat is, mint például a Wolfram Alpha – kiszámított eredményeket nem fogadunk el. Ha harmincnál több esetet vizsgálsz, pedig lényegesen le lehetett volna szűkíteni az esetek számát, azt is úgy tekintjük, mintha programot írtál volna.

**Mérési feladatok**

A mérési jegyzőkönyv feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával, esetleg fotókkal), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is megadva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését. A mért és számított mennyiségeket ne adjuk meg indokolatlanul sok tizedesjeggyel, hanem csak a becsült hibával összhangban álló pontossággal. A mérési jegyzőkönyv legyen viszonylag tömör, de annyira áttekinthető, hogy annak alapján bárki meg tudja ismételni a leírt mérést. Nagyon sok (50-nél több) mérési adat esetén elegendő azoknak csak egy „reprezentatív" részét beküldeni és a többinek csak az átlagát közölni. A 6 oldalnál hosszabb jegyzőkönyv tartalmazzon egy rövid (kb. 1/2 oldalas) összefoglalást.

**Informatika megoldások**

Az I-jelű programozási feladatok megoldását Basic, C++, C#, Java, Pascal vagy Python nyelvek egyikén kell elkészítened. A fejlesztéshez bármilyen fejlesztőkörnyezet használhatsz, javasoljuk az Oktatási Hivatal honlapján elérhető emelt szintű érettségi szoftverlista fejlesztőeszközeit.

Az I-pontversenyben kitűzött alkalmazói feladatok megoldásához szintén az előbbi szoftverlista eszközeit javasoljuk. Az alkalmazói feladatokat a listán szereplő alkalmazásokkal fogjuk értékelni. Az egyéb használható alkalmazásokat egy-egy feladat leírása tartalmazza, ezek jórészt szabadon fölhasználható programok.

Az I/S és S-jelű feladatok megoldását C, C++, Pascal vagy Java nyelvek valamelyikén kell elkészítened. A megoldáshoz dokumentációt kell írnod és a forráskódot kommentekkel kell kiegészítened. A különálló dokumentációban a megoldás elvi menetének, algoritmusának ismertetését várjuk. A forráskód kommentezésének lényege, hogy segítségével – a dokumentáció ismeretében – könnyen megérthető legyen az egyes kódsorok, kódrészletek feladata, szerepe a megoldás menetében.

Az I/S és S-jelű programozási feladatok megoldását ellenőrizd az `http://ideone.com` tesztkörnyezetben a feladathoz elérhető bemenetekkel. Ezeknek a feladatoknak az értékelése részben automatikusan történik, ezért fontos, hogy a program az előírás szerinti formában adjon kimenetet.

## A megoldások elkészítése és beküldése

**Megoldásokat e-mailben nem fogadunk.**

A matematika és fizika dolgozatokat postán küldheted be, honlapunkon megszerkesztheted vagy kész fájl formájában feltöltheted. Az informatika feladatok megoldását csak elektronikusan adhatod be.

**A dolgozatok beküldése postán**

A matematika és fizika feladatok megoldását papíron leírva vagy nyomtatva, postán is beküldheted.

A szerkesztőség munkatársainak általában nagy mennyiségű dolgozatot kell rövid idő alatt feldolgozniuk. A postán beküldött dolgozatok szétválogatása, javítása és a pontszámok gyors könyvelése akkor lehetséges, ha betartod az alábbi formai követelményeket:

- Minden egyes megoldás külön lapra kerüljön. Ez azért nagyon fontos, mert a különböző feladatok más-más javítóhoz kerülnek. A lapok A4 méretűek (kb. $21 \times 30$ cm) legyenek.
- Minden egyes beküldött dolgozat bal felső sarkában nyomtatott betűkkel szerepeljen:
  - a példa betűjele (A, B, C, K, M, G vagy P) és száma pirossal,
  - a teljes neved és osztályod,
  - az iskolád neve városnévvel együtt,
  - az e-mail címed.
- Minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – négyrét hajts össze (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a fejléc kívülre kerüljön.


Azokat a dolgozatokat, amelyeken nincs feltüntetve osztály és iskola városnévvel együtt, nem értékeljük; azokat, amelyek több feladat megoldását tartalmazzák egy lapon, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem versenyszerűnek tekintjük.

Postai beküldés esetén a dolgozatokat a következő címre várjuk:

**KöMaL feladatok**
**Budapest 112, Pf. 32. 1518**

A matematika és a fizika feladatokat közös borítékban is beküldheted. Ügyelj a helyes címzésre. A rossz címre küldött dolgozatokat nem tudjuk értékelni.

A postán beküldött megoldásokhoz kísérőjegyzéket kérünk a minta szerint, a borítékban egy külön papíron felsorolva az összes beküldött dolgozat jelét és számát. A név, osztály és iskola feltétlenül szerepeljen a kísérőjegyzéken!

Kísérőjegyzék
Szabó 172 István 10. évf.
Miskolc, Földes Ferenc Gimn.

A 2020. évi 6. számból a következő feladatokra küldök megoldást:
B. 5038., B. 5040., B. 5041., B. 5044., B. 5045.
Összesen 5 dolgozat.

**A megoldások online szerkesztése az Elektronikus Munkafüzetben**

Az Elektronikus Munkafüzet a honlapunk része. Webes felület, amely lehetőséget ad a megoldás közvetlen beírására, szerkesztésére. A megoldásaidat módosíthatod, átszerkesztheted a beküldési határidőig.

Képletek szerkesztéséhez a TEX rendszert használjuk. Javasoljuk, hogy honlapunkon járd végig a *TeX tanfolyamot* (`https://www.komal.hu/mf?a=tk`).

**Kész fájlok feltöltése**

Megoldásaidat az otthoni vagy iskolai számítógépeken is elkészítheted, és a kész fájlt honlapunkon feltöltheted. Kérjük, hogy szöveges dokumentumok esetén a többféle operációs rendszerben olvasható PDF formátumot használd. A dokumentum elején ugyanolyan fejléc (tehát a feladat száma, név, osztály, város, iskola, e-mail cím) szerepeljen, mint a postán küldött dolgozatokon.

**Kézírással készült megoldást csak postai úton fogadunk el.** Ha kézzel rajzolsz ábrát, és azt jól látható minőségben beszkenneled, majd beilleszted a megoldásba, azt elfogadjuk.

**Az informatika megoldások beküldése**

**Az informatika feladatok megoldásait kizárólag elektronikus formában, a KöMaL honlapján küldheted be.** Amennyiben a megoldás több fájlból áll, úgy egy, a fájlok mindegyikét és a dokumentációt is tartalmazó, a feladat sorszámával egyező nevű mappát kell ZIP tömörítéssel becsomagolva egyetlen fájlként beküldened. Ügyelj arra, hogy a tömörített állományokba futtatható fájlok (pl. a fejlesztéskor létrejövő `.exe` állomány) ne kerüljenek.

A programozási feladatoknál a forráskód első soraiban megjegyzésként szerepeljen

- a feladat száma;
- a versenyző teljes neve (jelzőszámmal) és osztálya;
- az iskola neve városnévvel együtt;
- a versenyző e-mail címe;
- az alkalmazott fordítóprogram neve és verziószáma.

Kérjük, hogy a programozási feladatoknál a program be- és kimenete mindig a feladatban megadott módon valósuljon meg. Erre azért van szükség, mert a beküldött programokat sokféle tesztadatra lefuttatjuk, és ezt igyekszünk automatizálni.

Az informatika feladatokkal kapcsolatos bárminemű kérdéseket, esetleges reklamációkat az `inf-szerk@komal.hu` címre várjuk.

**A beküldési határidő**

A beküldési határidő minden kategóriában a lap megjelenését követő hónap 10. napja; szombat, illetve munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. A határidő azt jelenti, hogy a küldeményt legkésőbb a határidő napján 24 óráig kell postára adnod. (Kérjük, ellenőrizd a postai bélyegző dátumát, mert későbbi dátumot nem fogadunk el.) A határidő betartását szigorúan ellenőrizzük. **A határidő után a személyesen behozott dolgozatokat sem fogadjuk el!** Elektronikus beküldés esetén vedd figyelembe az internet esetleges hibáit és a beküldési határidő idő előtti órákban a szerver gépünk esetleges túlterheltségét; ilyen okokra hivatkozva sem fogadunk el késedelmes dolgozatokat.

## Értékelés

A pontversenyek állását és versenyzőink részletes eredményeit a honlapunkon folyamatosan közöljük. Kérjük, vegyétek figyelembe, hogy a postai kézbesítés és a dolgozatok feldolgozása sok időt vesz igénybe; általában a beküldési határidő után 1–2 hónappal jelennek meg az eredmények. Versenyzőinket e-mailben is értesítjük a pontszámok változásairól. Javítóink a pontszámon kívül szöveges értékelést is küldhetnek, például felhívhatják a figyelmedet a dolgozatod hiányosságaira. Ez azonban nem kötelező, ugyanis a javítóknak nem ritkán százas nagyságrendű dolgozatot kell kijavítani.

**Reklamációk**

A dolgozatok értékelése után az Elektronikus Munkafüzetben rövid kérdést vagy üzenetet küldhetsz a javítónak, ő pedig ugyanott válaszolhat. A különböző feladatokat különböző javítók javítják, ezért mindig csak az adott feladatról kérdezz.

Ügyelj az udvarias hangvételre. Olyan módon kérdezz, amit szemtől-szembe, akár a tanáraiddal vagy a szüleiddel szemben is helyesnek tartanál.

Eldöntetlen vita, reklamáció esetén a szerkesztőséghez fordulhatsz. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el a `szerk@komal.hu` címen.

Javasoljuk, hogy beküldött dolgozataid másolatát őrizd meg, hogy a lapban közölt megoldással össze tudd hasonlítani. Ha a dolgozat esetleg elvész a postán, csak másolat esetén tudjuk elfogadni a reklamációt.

**Szabálytalan versenyzés**

**FONTOS! A versenyek egyéni versenyek; a versenyzőknek önállóan kell elkészíteniük a példák megoldásait.** A mérési verseny kivételével (lásd az M pontverseny leírását) tilos a kitűzött feladatokat a beküldési határidő előtt másokkal megvitatni, másoktól segítséget kérni vagy elfogadni a feladatok megoldásához. A közösen készített vagy másolt dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – *nem versenyszerűnek értékeljük.* A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak. Súlyosabb, az egész pontversenyt veszelyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket kizárjuk a versenyből.

**A végeremény közzététele**

A versenyek végeredménye az összes dolgozat kijavítása után, várhatóan augusztus elején a honlapunkon, majd a 2020. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2020. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2020. évi *KöMaL Ifjúsági Ankét* rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

## Néhány megjegyzés

A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe. Szép, érdekes és nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a különdíjért folyó versenybe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

**a Szerkesztőség**

# Matematika feladatok megoldása

**B. 4989.** *Az $ABC$ háromszög $BC$, $CA$ és $AB$ oldalainak felezőpontjai rendre $D$, $E$ és $F$. Jelölje a háromszög súlypontját $S$. Tegyük fel, hogy az $AFS$, $BDS$ és $CES$ háromszögek kerülete egyenlő. Mutassuk meg, hogy az $ABC$ háromszög szabályos.*

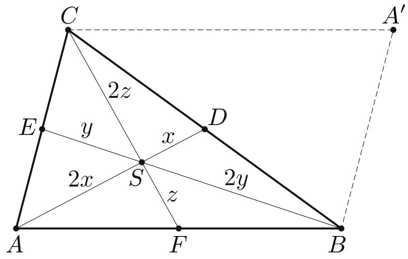
(*6 pont*)

**Megoldás.** Tükrözzük az $A$ csúcsot a $D$ pontra, a tükörképet jelölje $A'$. Mivel $AA'$ és $BC$ a $D$ pontban felezik egymást, ezért $ABA'C$ paralelogramma.

A paralelogramma-tételt felírva kapjuk, hogy

$$AA'^2 + BC^2 = AB^2 + BA'^2 + A'C^2 + CA'^2.$$

A háromszög oldalait és súlyvonalait a szokásos módon jelölve és kihasználva, hogy $AB = CA'$ és $BA' = AC$ kapjuk, hogy




$$(2s_a)^2 + a^2 = c^2 + b^2 + c^2 + b^2,$$

$$4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$s_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}}.$$

Hasonló a képlet $s_b$-re és $s_c$-re. A képletekből látható, hogy ha egy oldal legalább akkora, mint egy másik, akkor a hozzá tartozó súlyvonal legfeljebb akkora, mint a másikhoz tartozó. Az is következik, hogy ha az $a$-hoz és $b$-hez tartozó súlyvonal hossza egyenlő, akkor $a = b$, hiszen felírva a képletet a két súlyvonalra, és egyenlővé téve őket, majd négyzetre emelve és rendezve azt kapjuk, hogy $a^2 = b^2$.

Legyen az $a$-hoz tartozó súlyvonal hossza $3x$, a $b$-hez tartozó $3y$, a $c$-hez tartozó pedig $3z$. A súlypont harmadolja a súlyvonal háromszögbe eső szakaszát, tehát az egyes háromszögek kerületeit fel tudjuk írni ezeknek a szakaszoknak a segítségével.

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a$-nál nincs hosszabb oldal. Ezután két esetet különböztetünk meg: $b \geqslant c$ és $b \leqslant c$.

Kezdjük az első esettel. Ekkor tehát $a \geqslant b \geqslant c$. Ennek alapján $x \leqslant y \leqslant z$. Tudjuk, hogy az $AFS$ és $CES$ háromszögek kerülete egyenlő. Az $AFS$ háromszög kerülete $\frac{c}{2} + z + 2x$, a $CES$ háromszögé pedig $\frac{b}{2} + y + 2z$. Tudjuk továbbá, hogy

$$\frac{c}{2} \leqslant \frac{b}{2}, \quad z \leqslant z, \quad x \leqslant y, \quad x \leqslant z.$$

Ezt a négy egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy $AFS$ kerülete legfeljebb akkora, mint $CES$ kerülete. Viszont a feladat szövege szerint ezek egyenlőek, ami pedig csak akkor lehet, ha minden egyenlőtlenségben az egyenlőség esete teljesül. Tehát $\frac{c}{2} = \frac{b}{2}$, vagyis $c = b$; és $x = y$, vagyis a második bekezdés értelmében ekkor $a = b$. Tehát $a = b = c$, a háromszög szabályos.

A másik eset nagyon hasonló. Ekkor $a \geqslant c \geqslant b$, emiatt $x \leqslant z \leqslant y$. Ebben az esetben a feladat szövege alapján az $AFS$ háromszög kerülete $\left(\frac{c}{2} + 2x + z\right)$ megegyezik a $BDS$ háromszög kerületével $\left(\frac{a}{2} + x + 2y\right)$. Felírva, majd összeadva az

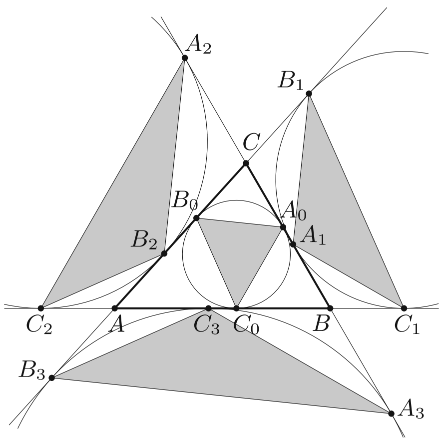
$$\frac{a}{2} \geqslant \frac{c}{2}, \quad x \geqslant x, \quad y \geqslant x, \quad y \geqslant z$$

egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy $BDS$ kerülete legalább akkora, mint $AFS$ kerülete, és egyenlőség csak akkor lehet, ha minden egyenlőtlenségnél az egyenlőség esete áll fenn. Ekkor pedig $a = c$; és $y = z$, amiből következik, hogy $b = c$. Tehát $a = b = c$, vagyis a háromszög szabályos.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy ha a feltétel igaz, akkor a háromszög biztosan szabályos.

*Dobák Dániel* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

46 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 19 versenyző: Baski Bence, Bursics András, Dobák Dániel, Füredi Erik Benjámin, Geretovszky Anna, Győrffi Ádám György, Győrffy Johanna, Hegedűs Dániel, Kitschner Bernadett, Nagy Nándor, Rareş Polenciuc, Soós Máté, Szabó Dávid, Szabó Kornél, Terjék András József, Török Mátyás, Velich Nóra, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 5 pontos 6, 4 pontos 4, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 10 dolgozat.




**B. 5010.** Egy hegyesszögű $ABC$ háromszög beírt köre az oldalakat az $A_0$, $B_0$ és $C_0$ pontokban érinti. A háromszög három hozzáírt körének érintési pontjai az oldalegyeneseken rendre $A_1$, $B_1$ és $C_1$; $A_2$, $B_2$ és $C_2$; illetve $A_3$, $B_3$ és $C_3$. Az $A_iB_iC_i$ háromszög területét jelölje $T_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}.$$

(*5 pont*)

**Megoldás.** Először belátjuk, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszögben a $C_0$-ból induló $m_{C_0}$, és az $A_3B_3C_3$ háromszögben a $C_3$-ból induló $m_{C_3}$ magasságok megegyeznek. Ennek igazolásához tekintsük az *ábrát.*

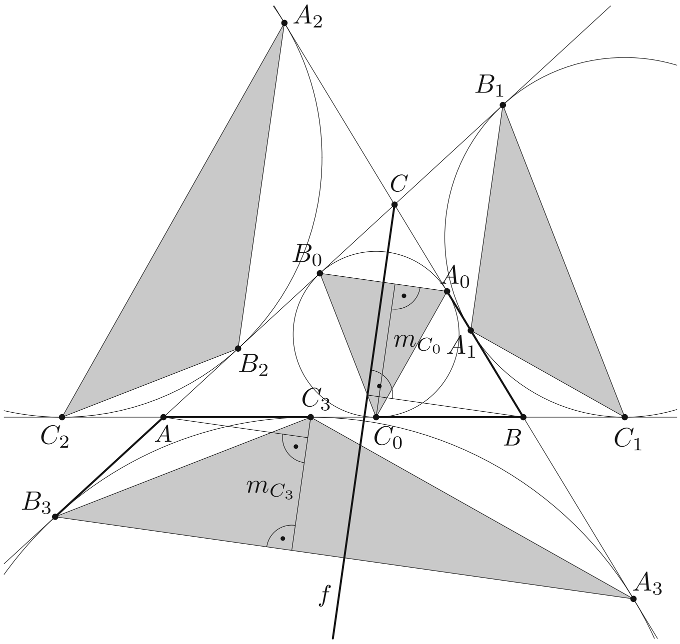
Mivel a külső pontból körhöz húzott érintők hossza megegyezik, ezért $CA_0 = CB_0$, illetve $CA_3 = CB_3$. Természetesen ebből az is adódik, hogy $A_0B_0$ és $A_3B_3$ párhuzamos szakaszok, amelyek közös szakaszfelező merőlegese éppen a $C$-beli belső szögfelező, jelöljük ezt $f$-fel.

Az $m_{C_0}$ és $m_{C_3}$ magasságok éppen az $f$-re vett vetületekkel adhatók meg, ezért jelölje tetszőleges $x$ szakasz $f$-re vonatkozó merőleges vetületét $x^f$. Az ábráról leolvasható, hogy $m_{C_0} = (C_0B)^f + (BA_0)^f$, illetve $m_{C_3} = (C_3A)^f + (AB_3)^f$.

Jól ismert, hogy

$$AB_3 = AC_3 = BC_0 = BA_0 = s - b,$$

ahol $s$ az $ABC$ háromszög kerületének fele. Ebből egyrészt nyilvánvalóan $(C_3A)^f = (C_0B)^f$, mivel $C_3A$ és $C_0B$ közös egyenesre illeszkedő, egyenlő hosszú szakaszok. Másrészt $(AB_3)^f = (BA_0)^f$ is következik, mivel ez a két szakasz is egyenlő hosszú, és $AB_3$ $f$-re vonatkozó tükörképe illeszkedik a $BA_0$ egyenesre. Ezzel az $m_{C_0} =$




$m_{C_3}$ egyenlőséget beláttuk. Hasonlóan igazolhatók az $m_{B_0} = m_{B_2}$ és $m_{A_0} = m_{A_1}$ összefüggések is (értelemszerű jelölésekkel).

Felhasználva a bizonyított $m_{C_0} = m_{C_3}$ összefüggést, továbbá a párhuzamos szelőszakaszok tételét kapjuk, hogy

$$\frac{T_0}{T_3} = \frac{B_0A_0}{B_3A_3} = \frac{CB_0}{CB_3} = \frac{s-c}{s},$$

s hasonlóan

$$\frac{T_0}{T_2} = \frac{s-b}{s} \quad \text{és} \quad \frac{T_0}{T_1} = \frac{s-a}{s}.$$

Ezeket összegezve

$$\frac{T_0}{T_1} + \frac{T_0}{T_2} + \frac{T_0}{T_3} = \frac{s-a}{s} + \frac{s-b}{s} + \frac{s-c}{s} = \frac{3s-2s}{s} = 1,$$

ami a bizonyítandóval ekvivalens.

*Nagy Nándor* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

32 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 21 versenyző: Apagyi Dávid, Baski Bence, Beke Csongor, Bukva Dávid, Csaplár Viktor, Füredi Erik Benjámin, Geretovszky Anna, Győrffi Ádám György, Hámori Janka, Hegedűs Dániel, Jánosik Áron, Kerekes Anna, Kovács Tamás, Nagy Nándor, Rareş Polenciuc, Stomfai Gergely, Telek Zsigmond, Tiderenczl Dániel, Tóth Balázs, Weisz Máté, Zsigri Bálint. 4 pontos 3, 3 pontos 4, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

# A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (624–628.)

**K. 624.** A 0–9-ig terjedő egész számokat elhelyezzük valamilyen sorrendben egy egyenes vonal mentén.

*a*) Adjunk meg egy olyan elrendezést, amelyben bármely három szomszédos szám összege 15-nél kisebb.

*b*) Megvalósítható-e ugyanez a típusú elrendezés, ha a 0-t kihagyjuk?

**K. 625.** Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben minden számjegy pontosan annyiszor szerepel, amennyi az értéke?

**K. 626.** Az alábbi táblázat egy négycsapatos, körmérkőzéses focibajnokság eredményeit tartalmazza a csapatok neve szerinti ABC-rendben. Minden csapat mindegyikkel egyszer játszott. Egy-egy mérkőzés győztese 3 pontot, a vesztes 0-t, döntetlenért mindkét csapat 1-1 pontot kapott.

| Csapat | Pont | Lőtt gólok | Kapott gólok |
|---|---|---|---|
| Balláb FC | | 8 | 4 |
| Fejes FC | 1 | 4 | 6 |
| Jobbláb FC | | 4 | 4 |
| Sprint FC | 1 | 4 | 6 |

Tudjuk, hogy a Balláb–Jobbláb mérkőzés eredménye 3 : 1 lett, és hogy a Fejes FC minden mérkőzésén lőtt gólt. Mennyi lett az egyes mérkőzések eredménye?

**K. 627.** Egy osztályból a tanár sorsolással választ egy felelőt. Annak a valószínűsége, hogy fiút választ, 2/3-a annak, hogy lányt választ. Mennyi a lányok aránya az osztálylétszámhoz képest?

**K. 628.** Zoli négy egyforma téglalap alakú papírdarabból egy nagyobb téglalapot állított össze, a papírokat átfedés nélkül, hézagmentesen az asztalra helyezve. A kapott téglalap területe 1200 cm$^2$. Tudjuk, hogy a papírokat úgy helyezte el, hogy nem vihető át bármelyik papírdarab bármelyik papírdarabra csak eltolás segítségével. Mekkora a nagy téglalap kerülete?

❄

**Beküldési határidő: 2019. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518**

❄

# A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1553–1559.)

### Feladatok 10. évfolyamig

**C. 1553.** Adjuk meg az $\left(x^{12}+\dfrac{1}{x^{18}}\right)^{25}$ kifejezés konstans tagját.

**C. 1554.** Egy téglalapot, amelynek egyik oldala $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$-szöröse a másiknak, átdaraboltunk egy vele egyenlő területű négyzetté. Hányszorosa a téglalap átlója a négyzetének?

### Feladatok mindenkinek

**C. 1555.** Oldjuk meg a pozitív prímszámok körében az

$$x+y^2=4z^2$$

egyenletet.

**C. 1556.** Az $ABC$ háromszög $C$ csúcsából induló belső szögfelező a szemközti oldalt a $P$ pontban metszi. A $P$ pont távolsága az oldalaktól $\frac{24}{11}$, továbbá $AC=6$ és $BC=5$. Határozzuk meg az $AB$ oldal hosszát.

**C. 1557.** A kétjegyű pozitív egész számok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy a két számnak van közös számjegye?

### Feladatok 11. évfolyamtól

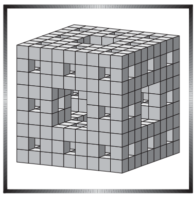
**C. 1558.** Hány közös pontja van az $x^2+y^2=1$ egyenletű körnek az $y=ax^2-1$ egyenletű parabolával a 0-tól különböző $a$ paraméter értékétől függően?

**C. 1559.** Egy tetraéder alaplapja szabályos háromszög, síkba kiterített palástja pedig olyan trapéz, melynek oldalai 10, 10, 10 és 14 egység hosszúak. Adjuk meg a tetraéder éleinek összhosszát és felszínét.

❄

**Beküldési határidő: 2019. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518**

❄



# A B pontversenyben kitűzött feladatok (5038–5045.)

**B. 5038.** Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög belsejében felvettünk egy $P$ pontot. Mutassuk meg, hogy az $ABP$, $CDP$, $EFP$ és $GHP$ háromszögek területeinek összege megegyezik a $BCP$, $DEP$, $FGP$ és $HAP$ háromszögek területeinek összegével.

(*3 pont*)

**B. 5039.** Egy $2019 \times 2019$-es táblázat mindegyik mezőjébe vagy $(+1)$-et, vagy $(-1)$-et írunk, majd kiszámoljuk az összes sor- és oszlopösszeget. Legfeljebb hány különböző számot kaphatunk?

(*3 pont*) Javasolta: *Blahota István* (Nyíregyháza)

**B. 5040.** Legyen az $ABCD$ négyzet $AB$ oldalának belső pontja $F$ és $AD$ oldalának belső pontja $E$. Az $E$ pontban állítsunk merőlegest a $CE$ egyenesre, az $F$ pontban pedig állítsunk merőlegest a $CF$ egyenesre. A két merőleges metszéspontja legyen $M$. Tegyük fel, hogy a $CEF$ háromszög területe fele a $BCDEF$ ötszög területének. Igazoljuk, hogy az $M$ pont rajta van a négyzet $AC$ átlóján.

(*4 pont*)

**B. 5041.** Egy $n \times n$-es táblázat mezőire egy-egy valós számot írunk. Egy ilyen táblázatot nullnégyzetnek hívunk, ha bármely legalább $2 \times 2$-es négyzet alakú részében (így magában az egész táblázatban is) az elemek összege 0 (az *ábrán* egy $3 \times 3$-as példa látható).

| | | |
|---:|---:|---:|
| 2 | −3 | 4 |
| −4 | 5 | −6 |
| 1 | −2 | 3 |

Mekkora a lehető legnagyobb $n$, amelyre van olyan $n \times n$-es nullnégyzet, amelynek nem minden mezőjén 0 áll?

(*5 pont*)

**B. 5042.** Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk, hogy nem trapéz, valamint, hogy $AC$ és $BD$ átlói egyenlő hosszúak. Az átlók metszéspontját jelölje $M$. Mutassuk meg, hogy az $ABM$ és $CDM$ körök második, $M$-től különböző metszéspontja a $BMC$ szög felező egyenesére esik.

(*4 pont*)

**B. 5043.** Mutassuk meg, hogy az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ halmaznak páratlan sok olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek átlaga egész szám.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

**B. 5044.** Adott az $ABC$ háromszög $AB$ oldalának belsejében a $D$, az $AC$ oldal belsejében az $E$ pont; a $BE$ és $CD$ szakaszok metszéspontja $M$. A $BCM$ háromszög területe legyen $x$, az $EDM$ háromszög területe pedig $y$. Igazoljuk, hogy

$$T_{ABC} \geqslant x\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

(*6 pont*)

**B. 5045.** Mely pozitív egész $n$ számok esetén van az első $n$ pozitív egész számnak olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorrendje, hogy az $a_1+1, a_2+2, \ldots, a_n+n$ számok mind teljes hatványok? (Egy számot teljes hatványnak nevezünk, ha előáll $a^b$ alakban, ahol $a, b \geqslant 2$ egész számok.)

(*6 pont*)

**Beküldési határidő: 2019. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518**

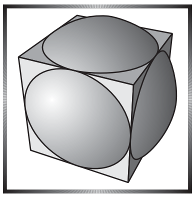
❄

**Figyelem!** Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2019. október 4-én, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A versenyzőknek előzetesen regisztrálniuk kell a versenyre, az ezzel kapcsolatos információ a

`http://bolyai.hu/kurschak.htm`

oldalon található.

## Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (755–757.)



**A. 755.** Bizonyítsuk be, hogy minden középpontosan szimmetrikus sokszöget át lehet darabolni négyzetté olyan módon, hogy véges sok sokszög alakú darabot használunk, és az egyes darabokat csak eltolni lehet. (Azaz az eredeti sokszög felbontható az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sokszögekre, egy négyzet felbontható a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sokszögekre úgy, hogy $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén $A_i$ és $B_i$ egymás eltoltja.)

**A. 756.** Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (valós számokon értelmezett, valós értékű) függvényt, melyre teljesülnek a következők:

(*i*) $f(x+1) = f(x) + 1$;

(*ii*) $f(x^2) = \big(f(x)\big)^2$.

(*Romanian Masters of Mathematics* feladat alapján)

**A. 757.** Ha $n$ nemnegatív egész szám, jelölje $H(n)$ a pozitív egész számoknak azon részhalmazát, amelynek $i$ pontosan akkor eleme, ha az $n$ kettes számrendszerbeli alakjában a hátulról $i$. jegy 1-es.

Két játékos, $A$ és $B$ a következő játékot játssza: először $A$ választ egy $k$ pozitív egész számot, ezután $B$ választ egy pozitív egész $n$ számot, melyre $2^n \geqslant k$. Legyen $X$ a $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ halmaz, $Y$ pedig a $\{0,1,\ldots,2^{n+1}-1\}$ halmaz. A $k$ körből álló játékot $A$ kezdi, és egy körben $A$ választ egy számot az $X$ vagy az $Y$ halmazból, majd $B$ választ egy számot a másik halmazból. $1 \leqslant i \leqslant k$ esetén jelölje $x_i$ az $i$ körben az $X$ halmazból választott számot, $y_i$ pedig jelölje az $i$. körben az $Y$ halmazból választott számot.

A játékot akkor nyeri meg $B$, ha minden $1 \leqslant i \leqslant k$ és $1 \leqslant j \leqslant k$ esetén teljesül, hogy $x_i < x_j$ pontosan akkor, ha $y_i < y_j$, továbbá $H(x_i) \subset H(x_j)$ pontosan akkor, ha $H(y_i) \subset H(y_j)$, egyébként $A$ nyer.

Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Javasolta: *Bodnár Levente* (Cambridge)

❄

**Beküldési határidő: 2019. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518**

❄

## ELTE matematikatanár-klubdélután

Az ELTE matematikatanár-klubdélutánt a 2019. őszi félévben 2019. október 2-án rendezik az ELTE TTK lágymányosi campusán, a déli épület 2-712-es teremben.

Program:

- 16:00–16:05. A klubdélutánt megnyitja *Simon Péter,* az ELTE Matematikai Intézet igazgatója.
- 16:05–16:35. *Sztranyák Attila* (Berzsenyi Dániel Gimnázium): Végtelen gumiszalagok és Ford-körök.
- 16:40–17:10. *Keleti Tamás* (ELTE Matematikai Intézet): Ugyan mi újat lehet még a matematikában kitalálni?
- 17:25–18:30. Beszélgessünk a trigonometriáról. Bevezeti és a vitát koordinálja *Horváth Eszter* (Kempelen Farkas Gimnázium).

Részletes program:

`http://www.math.elte.hu/esemenyek/matematikatanar-delutan/`.

## Informatikából kitűzött feladatok

**I. 487.** Adott egy $N$ elemű, pozitív egészekből álló számhalmaz ($2 \leqslant N \leqslant 20$). Készítsünk programot, amely

*a*) megkeresi a legnagyobb olyan $a$ számot a halmazban, amely minden nála kisebb halmazbeli számhoz relatív prím;

*b*) megadja a legkisebb olyan $a$-nál nagyobb $b$ számot, amellyel kibővítve a halmazt az *a*) feladatrész megoldása a hozzávett $b$ szám lesz – illetve 0-t ad, ha nincs ilyen $b$ szám.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be $N$ értékét, majd a következő sorból a halmazt alkotó $N$ darab egész számot. A standard kimenet első sorába írja az *a*) feladatrészben keresett számot, a kimenet második sorába a *b*) feladatrész megoldását.

Beküldendő egy `i487.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető állomány: `i487beki.zip`.

**I. 488.** A biológiai kísérletek kiértékelését igyekeznek automatizálni. Egy négyzet alakú táptalajon tenyésztett baktériumtörzs példányait lefényképezik, majd a fotókat több lépésben digitálisan feldolgozzák. A baktériumpéldányok különböző méretűek, alakúak és helyzetűek.

A táptalaj fényképét egy képzeletbeli négyzetháló segítségével cellákra osztják. Egy $50 \times 50$ cellából álló, az egyes baktériumpéldányokat már számokkal azonosítottan megjelenítő táblázat áll rendelkezésre a `meres.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású állományban.


A baktériumok az előfeldolgozott képen 1 és $N$ közötti egész számmal ($N \leqslant 50$) vannak azonosítva. Egy-egy példány összefüggő területet alkot, de egy cella csak egy baktériumhoz tartozik. Ha egy cellában nincs baktérium, akkor ott a táblázatban nincs adat. A mintán két baktériumpéldány látható, az 1-es és a 4-es sorszámú.

Értékeljük ki és segítsük a további munkát táblázatkezelővel.

1. Töltsük be a `meres.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. A munkalap neve legyen **kep**. Munkánkat bakterium néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Hozzunk létre még két munkalapot **szamolas** és **eredmeny** néven. A **szamolas** munkalapon végezzünk el minden, a megoldáshoz szükséges számolást.

Az **eredmeny** munkalapon jelenítsük meg a kérdésekre adott válaszokat és eredményeket. Mind a két munkalap tartalmának értelmezését feliratokkal segítsük.

3. A **kep** munkalapon az A:AX oszlopok szélességét és az 1:50 sorok magasságát állítsuk be úgy, hogy a cellák (normál nézetben) négyzetek legyenek.
4. A mérési eredményeket szemléltessük feltételes formázással. A különböző baktériumpéldányok celláit más-más kitöltőszínnel jelenítsük meg, az üres cellák maradjanak fehérek.
5. Ha az **eredmeny** munkalap egy adott cellájába beírunk egy sorszámot 1 és 50 között, akkor a mellette lévő cellában jelenjen meg, hogy ilyen sorszámú baktérium szerepel-e a képen.
6. Adjuk meg, hogy összesen hány baktérium van a képen.
7. Adjuk meg, hogy hányas sorszámú baktérium foglalja el a legnagyobb területet a képen és ez hány cella.
8. Adjuk meg annak a minimális méretű téglalapnak a szélességét és magasságát, amelyben a képen látható összes baktérium benne van.
9. Ha van, akkor adjuk meg két érintkező baktérium sorszámát, ha nincs, akkor írjuk ki, hogy „**Nincsenek egymással érintkező baktériumok.**"

Beküldendő egy tömörített `i488.zip` állományban a munkafüzet, valamint egy rövid leírás, amelyben szerepel az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

Letölthető állomány: `meres.txt`.

**I. 489 (É).** Tamás a kedvenc fényképeit rendezgette. Ezek mindegyikén szerepelnek emberek, akiket a programban egy ékezetek nélküli keresztnév vagy megszólítás azonosít. Előfordulnak a képeken Tamás és családtagjai (őket a programban az `En`, `Apa`, `Anya`, `Mama`, `Papa`, `Ocsi`, `Hugi` szöveggel jelöljük), valamint Tamás barátai, osztálytársai (a programban például `Anna`, `Zsolt`, `Judit`, `Evi`). Minden képen legalább egy személy szerepel, de egy képen természetesen egy személy csak egyszer. A képeken csak ismert, azonosítóval rendelkező személyek láthatók, minden azonosító egy szóból áll.

A képek némelyikéről tudni lehet, hogy hol vagy milyen alkalommal készült, melyeket a programban szintén ékezetek nélkül azonosítunk, például `Otthon`, `Erdei_suli`, `Tisza-to` (a többszavas neveket aláhúzásjellel kapcsoltuk össze). Sok esetben szerepel a képen a felvétel időpontja, például `2017.3.18`.

A képek készítésének helye, ideje és a rajta szereplő személyek megtalálhatóak a `kepszem.txt` szöveges állományban. A hiányzó időpont vagy helyszín helyett egy (‘`-`’) kötőjel szerepel a megfelelő helyeken.

A fájl első sorában a képek $K$ száma ($5 \leqslant K \leqslant 100$), és a következő $K$ sorban egy-egy kép adatai találhatók az alábbi minta szerint.

```
40
Szeged 2016.11.21. Juli Ocsi En
Fociedzes - Mama Ivan En Szabolcs
Otthon 2012.8.8. Szasa Laci Andras Hanna Zsuzsi Benedek Marci
...
```

Készítsünk programot, amely beolvassa a szöveges állományból az adatokat, és azok földolgozásával megoldja a következő feladatokat. Minden feladat be- és kimenete előtt írjuk ki a feladat sorszámát egy külön sorba a következő formában „`3. feladat:`”.

1. Adjuk meg, hogy Tamás hány ismerőse szerepel a képeken. Az eredmény például a következő szöveg legyen: „`Tamasnak 27 ismerose szerepel a kepeken.`”.
2. Határozzuk meg, hogy hány olyan kép van, ahol nem ismert a készítés helye és időpontja sem. Az eredményt a következőképp írjuk ki: „`6 kep keszitesenek ideje es helye ismeretlen.`”.
3. Adjuk meg, hogy hányan szerepelnek azon a képen, ahol a legtöbb személy fordul elő. A kiírás a következők szerint történjen: „`12 embernel nincs több egy kepen sem.`”.
4. Írjuk ki a képeken szereplő összes személy azonosítóját ABC-sorrendben egy sorban, vesszővel elválasztva és ponttal a végén. A kiírás formája: „`A kepeken szerepel: Anna, Balazs, Cecil ...`”.
5. Kérjük be az egyik ismerős nevét, és adjuk meg azokat az ismert időpontokat (az adatfájlban adott sorrendben), amikor Tamás (azonosítója `En`) és a bekért személy a fényképek szerint együtt volt. A bekérés formája: „`Kerem adj meg egy szereplot: Ocsi`”. Az eredményt a következőképp írjuk ki: „`Tamas es Ocsi kozos idopontjai: 2019.5.10. 2020.7.7.`” Ha nincs közös időpont, akkor a „`Tamas es Ocsi nem szerepel kozosen ismert idopontban keszitett kepen.`” mondatot írjuk ki.
6. Tamás szeretne egy családi tablót készíteni, ezért összegyűjti azokat a képeket, amelyeken legalább két, Tamáson kívüli családtag szerepel (hogy Tamás szerepel-e vagy sem, az nem lényeges). Készítsünk egy listát ezekről a képekről úgy, hogy megadjuk a készítés helyét, a készítés idejét, valamint a családtagok azonosítóját. A listában a képek legyenek az adatfájlban szereplő sorrendben, az egyes képen szereplő személyek ABC-sorrendben.

A lista formája legyen a következő (az adatokat táblázatosan jelenítsük meg, az első két oszlop szélessége 16-16 karakter):

```
Csaladi tablo
Otthon          2019.04.13.     Anya Apa En
Pecs            -               Hugi Ocsi Papa
...
```

Beküldendő egy `i489.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető állomány: `i489forras_beki.zip`.

**I/S. 37.** Béla a titkosszolgálatnak dolgozik, feladata egy szuperintelligens idegen civilizáció által küldött üzenetek feldolgozása. Az üzentek $N$ hosszú jelsorozatok, melyek ‘`0`’-t és ‘`1`’-et tartalmaznak. Mivel ez egy nem túl izgalmas munka, Béla úgy döntött megkeresi a számára érdekes részeket az üzenetben. Bélának az üzenet azon részei érdekesek, melyek ‘`00`’-val kezdődnek és ‘`11`’-gyel végződnek. Segítsünk

Bélának megmondani, hogy mennyi érdekes része van az üzenetnek, vagyis hány olyan $x$; $y$ ($x < y$) számpár van, amelynél az üzenet $x$-edik és $(x+1)$-edik helyén '0', $y$-adik és $(y+1)$-edik helyén '1' szerepel.

*Standard bemenet:* az első és egyetlen sora tartalmazza az üzenetet.

*Standard kimenet:* az első sora tartalmazza az érdekes részek számát.

*Korlátok:* $1 \leqslant N \leqslant 10^5$, időkorlát: 0,3 mp.

*Értékelés:* a pontok 50%-a kapható $N \leqslant 10^4$ esetén.

*Példa:*

| Bemenet | Kimenet |
|---|---|
| `10001011011` | `4` |

Beküldendő egy `is37.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

**S. 136.** Adott egy $N$ csúcsú, $M$ élű egyszerű gráf (nincs többszörös él vagy hurokél, de nem feltétlenül összefüggő). A csúcsokat 0-tól $(N-1)$-ig indexeljük. A gráf összes csúcsa fekete vagy fehér. Jelölje $f(x)$ az $X$ csúcs színét. Cseresznyének hívunk egy $(A, B, C)$ rendezett csúcshármast, ha páronként különbözőek és létezik az $A-B$, valamint a $B-C$ csúcspárok közt él. Egy $(A, B, C)$ cseresznye finom, ha $f(A) = f(C)$ és $f(A) \neq f(B)$. Adjuk meg, hogy egy él behúzásával legföljebb mennyire növelhető a finom cseresznyék száma. ($A$ és $B$ csúcs összeköthető egy éllel, ha $A \neq B$, és eddig nem létezett köztük él.)

*Standard bemenet:* az első sor tartalmazza $N$-et és $M$-et. A következő sor $N$ darab számot tartalmaz: az $i$-edik szám az $i-1$ indexű csúcs színét határozza meg, 0 ha fekete, 1 ha fehér. A következő $M$ sor mindegyike két számot tartalmaz. Az $i$-edik sor az $i$-edik él két végpontjának csúcsindexét adja meg.

*Standard kimenet:* a maximálisan elérhető finom cseresznyék száma.

*Korlátok:* $3 \leqslant N \leqslant 10^5$, $0 \leqslant M \leqslant \min(10^5, N^2 - N - 1)$. Időkorlát: 0,3 mp.

*Értékelés:* A pontok 50%-a kapható, ha a gráf fa.

*Példa:*

| Bemenet (a / jel a sortörést helyettesíti) | Kimenet |
|---|---|
| `5 4`<br>`0 1 1 1 0`<br>`0 1 / 1 4 / 3 0 / 0 2` | `12` |

Beküldendő egy `s136.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

**A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:**
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Beküldési határidő: 2019. október 10.**

# Öt bronzérem az 50. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

### (Tel-Aviv, Izrael, 2019. július 6–15.)

A magyar csapat 5 bronzéremmel végzett a Tel-Avivban július 6. és 15. között megrendezett versenyen. Az országok közötti nemhivatalos éremtáblázaton Magyarország 78 ország közül a 38. helyet szerezte meg.

A csapat és eredményeik:

**Csépányi István** (Egri Szilágyi Erzsébet Gimn. és Koll., 12. oszt.) *bronzérem* (13,7 pont), felkészítő tanára: *Szabó Miklós;*

**Fajszi Bulcsú** (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. oszt.) *bronzérem* (12,9 pont), felkészítő tanárai: *Csefkó Zoltán* és *Horváth Gábor;*

**Fitos Bence** (Budapest, Németh László Gimnázium, 12. oszt.) *bronzérem* (12,8 pont), felkészítő tanárai: *Szászvári Irén* és *Dégen Csaba;*

**Póta Balázs** (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 12. oszt.) *bronzérem* (12,3 pont), felkészítő tanárai: *Juhász Zoltán, Bognár Gergely* és *Sávoli Zsolt;*

**Elek Péter** (DRK Dóczy Gimnáziuma, 12. oszt.) *bronzérem* (11,4 pont), felkészítő tanára: *Tófalusi Péter.*

Az országok közötti nemhivatalos verseny (pont- és éremtáblázat, az első 40 helyezett):

| | **Ország** | **Arany-érem** | **Ezüst-érem** | **Bronz-érem** | **Dicséret** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Kína | 5 | | | |
| 2. | Dél-Korea | 5 | | | |
| 3. | Oroszország | 4 | 1 | | |
| 4. | Vietnam | 3 | 2 | | |
| 5. | India | 2 | 3 | | |
| 6. | USA | 2 | 3 | | |
| 7. | Tajvan | 2 | 3 | | |
| 8. | Izrael | 2 | 2 | 1 | |
| 9. | Szingapúr | 2 | 2 | 1 | |
| 10. | Japán | 1 | 4 | | |
| 11. | Thaiföld | 1 | 3 | 1 | |
| 12. | Törökország | 1 | 2 | 2 | |
| 13. | Észtország | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 14. | Fehéroroszország | 1 | | 4 | |
| 15. | Szlovénia | 1 | 2 | 1 | |

| | **Ország** | **Arany-érem** | **Ezüst-érem** | **Bronz-érem** | **Dicséret** |
|---|---|---|---|---|---|
| 16. | Finnország | 1 | | 2 | |
| 17. | Hongkong | | | 5 | |
| 18. | Indonézia | | 4 | 1 | |
| 19. | Románia | | 4 | 1 | |
| 20. | Egyesült Királyság | | 3 | 2 | |
| 21. | Kanada | | 3 | 1 | |
| 22. | Szerbia | | 2 | 3 | |
| 23. | Németország | | 2 | 3 | |
| 24. | Brazília | | 2 | 3 | |
| 25. | Franciaország | | 2 | 3 | |
| 26. | Bulgária | | 2 | 3 | |
| 27. | Szlovákia | | 2 | 1 | |
| 28. | Ausztrália | | 1 | 4 | |
| 29. | Olaszország | | 1 | 4 | |
| 30. | Lengyelország | | 1 | 3 | 1 |
| 31. | Litvánia | | 1 | 3 | 1 |
| 32. | Ukrajna | | 1 | 3 | 1 |
| 33. | Csehország | | 1 | 3 | 1 |
| 34. | Fülöp-szigetek | | 1 | 3 | |
| 35. | Svédország | | 1 | 2 | 2 |
| 36. | Ausztria | | 1 | 2 | 2 |
| 37. | Örményország | | | 5 | |
| **38.** | **Magyarország** | | | **5** | |
| 39. | Grúzia | | | 4 | 1 |
| 40. | Litvánia | | | 2 | 3 |

A ponttáblázatot nem lehet elkészíteni (legfeljebb a 24. helyig), mert csak a díjazottak pontszámát közlik. Magyarország a nem díjazott versenyzők ismeretlen pontszámától függően a 32–37. helyen lehet.

Az olimpiára való készülés szokás szerint a budapesti (*Sarkadi Tamás, Szász Krisztián, Tasnádi Tamás, Vankó Péter, Vigh Máté*), a miskolci (*Zámborszky Ferenc*), a pécsi (*Kotek László*), a szegedi (*Hilbert Margit, Sarlós Ferenc*) és a székesfehérvári (*Orosz Tamás, Ujvári Sándor*) olimpiai szakkörökön, valamint a BME Fizika Tanszékén szervezett mérési foglalkozásokon kezdődött. A csapatot a szakkörök résztvevői és az országos versenyeken kimagasló eredményeket elért tanulók közül a márciusban megrendezett, kétfordulós *Kunfalvi Rezső versenyen* válogattuk ki. A résztvevőknek a versenyen az olimpián szokásos stílusú és nehézségű elméleti és mérési feladatokat kellett megoldaniuk. Az egymást követő fordulók

– az olimpiához hasonlóan – a versenyzők fizikai állóképességét is próbára tették. A csapat kiválasztásánál a válogatóversenyen elért eredmény mellett a korábbi versenyeredményeket és a KöMaL mérési versenyében elért eredményt is figyelembe vettük.

A felkészülés első lépéseként a csapat tagjai részt vettek az idén már harmadszor megrendezett Európai Fizikai Diákolimpián (EuPhO), ezt követte a BME-n megtartott kétnapos csapatfelkészítés.

A csapat *Vankó Péter* (BME Fizikai Intézet) és *Vigh Máté* (BME Fizikai Intézet) csapatvezetőkkel, valamint Szász Krisztián (BME Fizikai Intézet) megfigyelővel a verseny előtti napon, július 6-án, szombaton kora délután indult a versenyre. Vasárnap délután volt a megnyitó és egy közös vacsora. A csapatvezetők másnap, hétfő reggeltől vitatták meg és fordították le – a szokásostól eltérően már késő estére – az elméleti feladatokat, amelyeket a versenyzők kedd délelőtt oldottak meg.

Az első feladat egy olyan slinky-rugóval foglalkozott, amelyben az erő arányos a rugó hosszával, és nyújtatlan esetben nem erőmentes, azaz bizonyos minimális erő szükséges a megnyújtásához. Az első részben az erővel terhelt rugó hosszának és a megnyújtásához szükséges munkának, valamint egy fellógatott rugó egyensúlyi hosszának meghatározása volt a feladat. A második részben a diákok a megadott modell keretében vizsgálták a függőlegesen tartott, majd elengedett slinky mozgását, végül pedig az összecsukódási folyamatban disszipálódó hőt határozták meg. A témakör nem volt ismeretlen a csapatnak, de vélhetően a többi két feladat hosszú szövege és bonyolultsága elterelte a versenyzők figyelmét, ezért ezt a feladatot hiányosan tudták megoldani.

A második feladat témája a mikrohullámi sütő működése volt. A mikró belsejében kialakuló elektromágneses állóhullámokat egy magnetronnak nevezett alkatrész állítja elő, a feladat első részében ennek a működésével foglalkoztak a diákok. A hengeres szerkezetű magnetron belsejében időben változó elektromos és mágneses tér hatására küllőszerűen elhelyezkedő elektronnyalábok alakulnak ki, amelyek a szerkezetre jellemző frekvenciával forognak. Ha ennek a forgásnak a frekvenciája megegyezik a változó elektromágneses tér frekvenciájával, a magnetron belsejében lévő elektromágneses tér rezonanciaszerűen felerősödik (ezt pedig egy hullámvezető tereli tovább a sütő ételmelegítésre szolgáló térrészébe). A feladat második felében a diákoknak azt kellett tanulmányozni, hogyan nyelődik el az elektromágneses hullám energiája vízben és sós vízben (levesben). A második feladat egésze az egymásra épülő alkérdések ellenére koncepcionálisan nehéznek bizonyult, csak kevés versenyzőnek sikerült megértenie a magnetron működési elvét.

A harmadik feladat termoakusztikus generátorról szólt: ha egy sípban a hőmérséklet változik a hely függvényében (például a csövet egy helyen gázlánggal melegítjük, máshol pedig vizes kendővel hűtjük), akkor megfelelő körülmények közt ez erősítheti a sípban kialakuló állóhullámokat, azaz termikus energia segítségével mechanikai munkavégzés történik. A feladat első részében a versenyzők még az állandó hőmérsékletű csőben kialakuló állóhullámokat vizsgáltak: a kérdések által segítve le kellett vezetni a hullámegyenletet, majd a csőben kialakuló hangsebesség és a rezgés közben adiabatikusan összenyomódó-kitáguló levegő hőmérséklet-változásainak meghatározása volt a feladat. A második, hosszabb részben a síp egy kis darabján külső hőkontaktus segítségével helyfüggő hőmérsékletet hozunk létre. A diákoknak – ismét több kérdéssel vezetve – azt kellett vizsgálniuk, hogy milyen körülmények között erősíti ez a helyfüggő hőmérséklet a csőben kialakuló akusztikus állóhullámot, és ha létrejön az erősítés, akkor hogyan, mekkora hatásfokkal működik ez a hőerőgép. A feladat a magyar csapatnak nehéz volt, a második részével lényegében egyáltalán nem foglalkoztak.

A második fordításra szerdán került sor: a csapatvezetők délelőttől késő estig megvitatták és lefordították a mérési feladatokat.

Az első mérési feladatban a versenyzők optikai kísérletet végeztek el. A három, független mérésben az volt a közös, hogy a keresett paramétereket a *lehető legnagyobb pontossággal* kellett megmérni, és ehhez mindig valamilyen szélsőérték közelében lehetett a méréseket elvégezni – erre azonban a diákoknak maguktól, iránymutatás nélkül kellett rájönni. Az első részben egy nagy, lapos korong törésmutatóját, a második részben egy diffrakciós rács rácsállandójának és a lézerfény hullámhosszának hányadosát, a harmadikban pedig egy közel szabályos háromszög alakú prizma törésmutatóját mérték meg a diákok. A feladat nehézségét elsősorban a nagy pontosság eléréséhez szükséges elrendezés kitalálása (utoljára a 2000-es angliai olimpián kellett ennyire önállóan megtervezni a mérést), majd annak összeállítása, és végül a kellő számú mérés elvégzése, kiértékelése jelentette. Azonban a rendelkezésre álló idő (a teljes ötórás versenynap körülbelül fele) erre csak a legjobbaknak volt elég, a nagy többség csak a mérések egy részével foglalkozott.

A második mérési feladatban fémek elektromos és hővezetési tulajdonságait kellett összehasonlítani. Fémekben a töltéshordozók a szabad elektronok, és nagyrészt az elektronok felelnek a hővezetésért is, ezért a hővezetési együttható és az elektromos vezetőképesség jó közelítéssel egyenesen arányos egymással. Ezt mondja ki a Wiedemann–Franz-törvény, amit a diákok kísérletileg vizsgáltak alumínium, vörösréz és sárgaréz esetére. Az elektromos vezetőképességet a felsorolt három anyagból készült, egyforma geometriájú csőbe ejtett mágnes esési idejéből lehetett meghatározni megadott formulák alapján. A mozgó mágnes a fémcső falában örvényáramokat kelt, melyek mágneses tere visszahat a mágnesre, fékezve azt. Az örvényáramok erőssége függ a mágnes sebességétől és a fém vezetőképességétől, így ez utóbbira az esési időkből lehet következtetni. A hővezetési együtthatót ennél hagyományosabb módszerrel kellett meghatározni. A környezettől termikusan elszigetelt fémcsövek egyik végét ismert teljesítményű fűtőszállal melegítve, a másik végét pedig állandó hőmérsékleten tartva a csőben kialakuló hőmérsékletgradiens értéke megmérhető, ebből a hővezetési tényező kiszámítható. Sajnos ebben a mérési feladatban is az időhiány jelentette a magyar csapatnak a fő nehézséget.

Csütörtök délelőtt, az elméleti fordulóhoz hasonlóan, a versenyzőknek ismét 5 órájuk volt a feladatok megoldására. A versenynapok után a csapatvezetők és a rendezők is kijavították a dolgozatokat, megállapították a ponthatárokat. A verseny szabályai és a versenyzők által elért eredmények alapján 27,2 ponttól aranyérmet, 17,1 ponttól ezüstérmet, 11,2 ponttól bronzérmet és 8,3 ponttól dicséretet lehetett kapni. Ezt követte a végső pontszámokat kialakító egyeztetés (az úgynevezett moderáció).

A verseny mellett a szervezők különböző programokat szerveztek. A szakmai előadásokon és bemutatókon kívül a diákok a Holt-tengerhez és a Júdeai-sivatagba, Jeruzsálembe, Akkóba és Haifába, a Golán-fennsíkra és a Jordánhoz utaztak, sétáltak Jaffa óvárosában. A csapatvezetők Jeruzsálemben, valamint Haifában, Názáretben és Akkában jártak. A szervezés végig nagyon jó volt, sok szép helyre eljutottunk.

Vasárnap került sor a díjkiosztóra és este a záró vacsorára, másnap, július 15-én utaztunk haza.

A jövő évi Fizikai Diákolimpiát július 18-26. között Litvániában (Vilniusban) rendezik meg. A versenyre való felkészülést négy vidéki szakkör, valamint a budapesti elméleti és mérési szakkör segíti (a szakkörökről a legátfogóbb információ a `http://ipho.elte.hu` honlapon található):

**Székesfehérvár:** *Orosz Gábor* (Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar, Székesfehérvár, Budai út 45.),

**Szeged:** *Hilbert Margit* (Szegedi Tudományegyetem, Dóm tér 9. I. em. Budó Ágoston terem),

**Pécs:** *Kotek László* (Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Ifjúság útja 6. II. em. A408-as terem),

**Miskolc:** *Zámborszky Ferenc* (Földes Ferenc Gimnázium, 3525 Miskolc, Hősök tere 7.),

**Budapest:** *Vigh Máté* (Budapest, BME, Fizikai Intézet, 1111 Budafoki út 8.).

A tehetséggondozó mérési szakkörre írásban jelentkezni kell (erről lásd még külön felhívásunkat). Info:

`http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`.

A fenti szakkörökön való *aktív* részvétel mellett elsősorban önálló munkával, a KöMaL elméleti és mérési feladatainak rendszeres megoldásával lehet készülni a jövő évi Fizikai Diákolimpiára.

Eredményes felkészülést kívánunk!

**Szász Krisztián, Vankó Péter** és **Vigh Máté**

## Tehetséggondozás
## Mérési szakkör a BME Fizikai Intézetében

A fizika iránt érdeklődő, tehetséges középiskolás diákok számára a BME Fizikai Intézet gyakorlati foglalkozásokat tart. A foglalkozásokon lehetőséget biztosítunk arra, hogy a tanulók mérőpárokban fizikai kísérleteket és méréseket végezhessenek. A foglalkozásokra októbertől kezdődően kéthetente, kedden 15.00-tól 18.00-ig kerül sor, összesen nyolc alkalommal. Információ: `http://mono.eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`

Az érdeklődők e-mail-ben jelentkezhetnek 2019. szeptember 30-ig az alábbi címen: `vanko@eik.bme.hu`

Elsősorban a gimnáziumok utolsó két évfolyamára járók jelentkezését várjuk. A jelentkezők írjanak pár sort magukról, ismertessék a fizika és a matematikai tanulmányaik során elért eredményeiket (versenyeredmények, KöMaL szereplés stb.), és továbbtanulási elképzeléseiket.

A foglalkozások ingyenesek! Minden jelentkezőt e-mail-ben értesítünk (aki nem kap választ, küldje el még egyszer a jelentkezését).

**Vankó Péter**

## Beszámoló a 3. Európai Fizikai Diákolimpiáról

Immár harmadik alkalommal, 2019. május 31. és június 4. között rendezték meg az Európai Fizikai Diákolimpiát (EuPhO) Rigában, Lettország fővárosában. A versenyen 27 európai és 9 Európán kívüli ország összesen 169 diákja vett részt. A verseny nehézségét mutatja, hogy mindössze 13 aranyérmet osztottak ki. Örvendetes, hogy az egyik magyar diák is aranyérmet szerzett, *Csépányi István* az abszolút 6. helyen végzett.

A csapat és eredményeik:

**Csépányi István** (Egri Szilágyi Erzsébet Gimn. és Koll., 12. oszt.) *aranyérem* (30,6 pont), felkészítő tanára: *Szabó Miklós;*

**Póta Balázs** (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 12. oszt.) *ezüstérem* (23,3 pont), felkészítő tanárai: *Juhász Zoltán, Bognár Gergely* és *Sávoli Zsolt;*

**Fajszi Bulcsú** (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. oszt.) *bronzérem* (20,1 pont), felkészítő tanárai: *Csefkó Zoltán* és *Horváth Gábor;*

**Elek Péter** (DRK Dóczy Gimnáziuma, 12. oszt.) *bronzérem* (16,9 pont), felkészítő tanára: *Tófalusi Péter;*

**Fitos Bence** (Budapest, Németh László Gimnázium, 12. oszt.) *dicséret* (11,3 pont), felkészítő tanárai: *Szászvári Irén* és *Dégen Csaba.*

A magyar csapat vezetője *Vankó Péter* volt, *Vigh Máté* pedig a zsűriben, a második elméleti feladat szerzőjeként képviselte hazánkat. Az alábbiakban közöljük a verseny feladatait, a megoldások a verseny honlapján érhetők el:

`https://eupho2019.lv`.

### Kísérleti feladat: Rádióhullámok terjedése

Az elektromágneses hullámok fontos szerepet játszanak az életünkben. Sok fejlett technológia épül ezeknek a hullámoknak a terjedési tulajdonságaira. Ebben a mérésben a rádióhullámok terjedését fogod vizsgálni vízben, levegőben és hullámvezetőben.

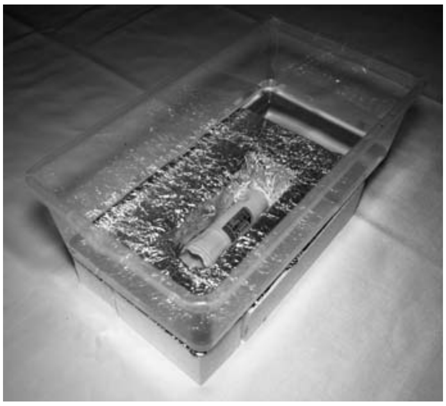
**Eszközök**

- Monokromatikus rádióhullám kibocsátó (adó) vízálló házban (a frekvenciája a 200 MHz – 5 GHz tartományban van), az *1. ábrán* $A$-val jelölve. A hullámforrás helyét az ábrán szaggatott vonal jelzi. Mellette a $B$-vel jelölt vevő, amely méri a vett elektromágneses hullám $P$ teljesítményét, és az eredményt decibelben mutatja. 1 decibel $= 10\log_{10}\left(\frac{P}{1\,\mathrm{mW}}\right)$. A vevő által mutatott érték 15 másodpercenként frissül. Az érzékelő helyét egy piros háromszög jelzi az eszközön.


*1. ábra*

**FIGYELEM! A vevő nem vízálló! Az adó háza vízálló és zárt, nem szabad kinyitni!**

- Különböző átmérőjű fémcsövek ($C$). A belső átmérők: $d_1 = 41$ mm, $d_2 = 46$ mm, $d_3 = 59$ mm, $d_4 = 100$ mm.
- Egy műanyag cső ($D$), amelynek egyik vége egy kupakkal le van zárva.
- Egy lapos fenekű műanyag doboz ($E$). A doboz falain áthaladó rádióhullámok fáziseltolódása elhanyagolhatóan kicsinek tekinthető.
- Egy tekercs alumíniumfólia ($F$).
- Négy darab habszivacs ($G$), amelyekből egy árnyékolt tartót építhetsz az adónak, ahogy ez a *2. ábrán* látható.



*2. ábra*

- Egy vonalzó ($H$).
- Egy műanyag vödör vízzel ($I$), egy mérőpohár ($J$), egy műanyag pohár ($K$), papírzsebkendők ($L$).
- Egy vékony madzag ($M$), egy csipesz ($N$), egy tekercs ragasztószalag ($O$), gumik ($P$), és egy farúd ($Q$).

Az adód párosítva van a vevőddel, és a vevő kiszűri az összes többi adó jelét. Azt azonban ne felejtsd el, hogy a rádióhullámok a teremben lévő minden tárgyról (és az emberekről is) visszaverődnek, amely a hullámok interferenciájához vezet. Így ha a fejedet közelebb tartod a vevőhöz, vagy elmozdulsz, megváltozhat a vevő által mutatott érték. A vett teljesítmény függ az adó és a vevő irányítottságától is. Légy óvatos az alumíniumfóliából készült árnyékolással is: kis lyukak és rések a hullámok kiszökését okozhatják.

Az egymástól független 1–4. kérdésre tetszőleges sorrendben adhatsz választ. Készíts vázlatrajzot minden mérési elrendezésről, amit használsz, hangsúlyozva a fontos részleteket! Írd le az összes használt összefüggést, készíts táblázatot minden mért adatról, és készíts grafikonokat, ahol szükséges! Nem kell hibaszámítást végezned, de törekedj a mérések minél pontosabb elvégzésére!

**1. A vevő érzékenysége.** Mekkora a legkisebb mérhető vett teljesítmény (mW-ban)?

**2. A hullámhossz vízben.** Határozd meg a rádióhullámok hullámhosszát vízben! Használd a 2. ábrán látható összeállítást.

A következő feladatokban a hullámok terjedését valamilyen közeggel (vízzel vagy levegővel) töltött fémcsövekben fogod tanulmányozni. Ekkor

$$\vec{E} = \vec{E}_0(r,\varphi)\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \tag{1}$$

ahol $\vec{E}$ az elektromos térerősség vektora, $\alpha$ írja le a közeg által okozott csillapítást (vízben $\alpha > 0$, levegőben $\alpha = 0$), és az $r$, $\varphi$, $z$ hengerkoordinátákat használjuk.

Az $\vec{E}_0(r,\varphi)$ függvény egy állóhullámot ír le a hullámvezető keresztmetszetében. Különböző állóhullámok a keresztmetszetben a hullámvezetőben terjedő hullám különböző *terjedési módjainak* felelnek meg. A diszperziós reláció egy a hullámvezetőben terjedő hullámra így adható meg:

$$\omega^2 = \left(k_\star^2 + k^2\right)c^2, \tag{2}$$

ahol $c$ a fénysebesség a hullámvezetőt kitöltő közegben, $k_\star$ pedig egy pozitív konstans, amely csak a cső átmérőjétől és a terjedési módtól függ. A kísérletedben minden terjedési mód elhanyagolható a legkisebb $k_\star$ értékkel jellemzett terjedési módot kivéve. Vedd figyelembe, hogy egy hullám csak akkor terjedhet egy hullámvezetőben csillapítás nélkül (valós értékű $k$ hullámszámmal), ha a rezgés frekvenciája elég nagy, $\omega \geqslant ck_\star$. Az (1) és (2) egyenletek érvényben maradnak alacsonyabb frekvenciákon is, tisztán képzetes $k = \mathrm{i}\mu$ hullámszámot eredményezve, amely az exponenciálisan csökkenő (eltűnő) módnak felel meg.

**3. Csillapítás vízben.** Határozd meg az $\alpha$ csillapítási együtthatót vízben! *Tanács:* A rádióhullámok akkor tudnak terjedni a műanyag csőben, ha az meg van töltve vízzel és körbe van tekerve alumínium fóliával. Használj ragasztószalagot a cső rögzítésére.

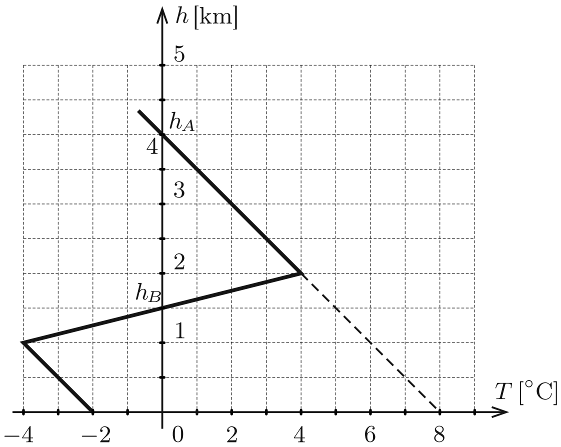
**4a. Exponenciálisan csökkenő mód levegővel töltött hullámvezetőkben.** Tedd az adót a $d_1 = 46$ mm átmérőjű alumínium csőbe, és tanulmányozd, hogyan változik a vevővel érzékelt hullám $P$ teljesítménye a cső végénél az adó és a cső vége közötti $z$ távolság függvényében! Mérési eredményeidből (a $P$ teljesítmény a $z$ távolság függvényében) határozd meg a $\mu$ paramétert az exponenciálisan csökkenő módban!

**4b.** Végezz el egy méréssorozatot annak meghatározására, hogyan függ a $\mu$ paraméter a cső $d$ átmérőjétől! Javasolj egy függvénykapcsolatot ezen paraméterek között, és igazold feltevésedet kísérletileg!

**5. Hullámhossz levegőben és a víz törésmutatója.** Határozd meg a rádióhullámok hullámhosszát levegőben, és számítsd ki a víz törésmutatóját a rádióhullámokra vonatkozóan!

### Elméleti feladatok

**1. Jégdara.** Érdekes időjárási jelenség fordulhat elő, ha a légkör hőmérsékleti profiljában *inverzió* alakul ki. A vastag, folytonos vonal a *3. ábrán* mutatja a hőmérsékleti profilt. Az inverzió az 1 km és 2 km közötti magasságban alakul ki.




*3. ábra.* A légkör $T$ hőmérséklete a talajtól mért $h$ magasság függvényében

Ilyen körülmények között a légkörön át hulló hó (részben) megolvad a melegebb rétegben, és (részben) újra megfagy „jégdara" formájában mielőtt eléri a földfelszínt.

Tegyük fel, hogy egy kicsi, gömb alakú jégcsepp majdnem teljesen elolvad, miközben átesik a légkör $h_{\mathrm{A}}$ és $h_{\mathrm{B}}$ magasság közötti rétegén, ahol a hőmérséklet fagypont felett van.

- Határozd meg, hogy a csepp tömegének hányad része fagy meg, mielőtt eléri a földfelszínt!
- Határozd meg a lehető legpontosabban mekkora lenne a csepp hőmérséklete a talajszinten, ha nem volna hőmérsékleti inverzió, és a hőmérsékleti profil a 2 km-es magasság alatt a szaggatott vonalat követné!

Hanyagold el a párolgást, a kicsapódást és a csepp méretváltozását. Feltételezd, hogy a víznek és a jégnek nagyon nagy a hővezetési tényezője, és hogy a légkör sűrűsége állandó a magasság függvényében.

*Adatok:* a víz fajhője $c_{\text{víz}} = 4{,}2\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$, a jég fajhője $c_{\text{jég}} = 2{,}1\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}$, a jég olvadáshője $L = 334\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$.

**2. feladat. Egy töltött golyó mozgása.** Egy tömör, homogén, gömb alakú, $m$ tömegű és $R$ sugarú golyó szigetelő anyagból készült és $Q$ töltése van a térfogatában egyenletesen elosztva. A golyót egy nagy, vízszintes felületre helyezzük, és csúszás nélkül gördülő mozgásba hozzuk úgy, hogy a középpontjának kezdetben $v_0$ vízszintes sebessége legyen. Az egész elrendezés egy, a felületre merőleges, $B$ nagyságú, homogén mágneses térben van. A tapadási súrlódási együttható elég nagy ahhoz, hogy megakadályozza a golyó megcsúszását. A golyó tehetetlenségi nyomatéka a középpontján áthaladó tengelyre vonatkozóan $2mR^2/5$.

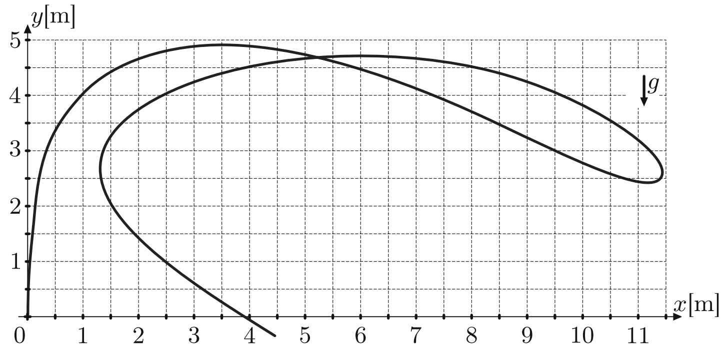
- Írd le a golyó középpontjának mozgását és a pályájának az alakját!

*Segítség:* A megközelítésedtől függően szükséged lehet a következő, bármely három $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra érvényes azonosságra:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

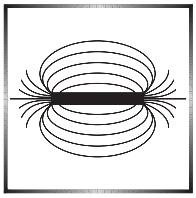
**3. Locsolócső.** Egy vízsugár állandó, ismeretlen $v$ sebességgel lép ki egy locsolócső végéből. Egy gyerek játszik a locsolócsővel: véletlenszerűen forgatja egy rögzített, függőleges $x-y$ síkban. A cső vége mindig az $x = y = 0$ pontban van, és a csővég tengelyének vízszintessel bezárt szöge soha nem kisebb 45°-nál. A vízsugárnak a levegőben minden pillanatban egy szabálytalan alakja van. Egy adott pillanatban ezt az alakot a *4. ábra* mutatja.

- Ezt az ábrát használva határozd meg a víz $v$ kilépési sebességét, ha a nehézségi gyorsulás $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.



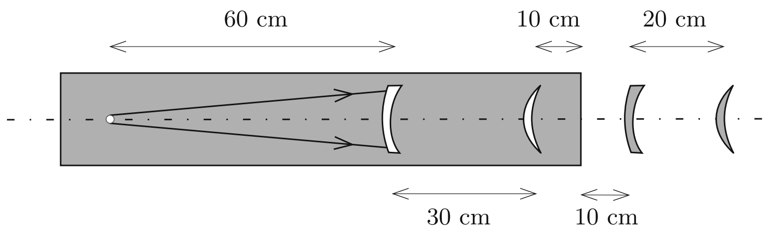

*4. ábra.* A vízsugár alakja egy adott időpillanatban

## Fizika feladatok megoldása



**P. 5075.** *Az* ábra *szerinti elrendezésben közös optikai tengelyen, egymással párhuzamosan négy vékony lencse helyezkedik el. Mindegyik lencse határfelületének görbületi sugara* 5 cm, *illetve* 10 cm. *Kettő közülük* $n=1{,}5$ *törésmutatójú üvegben lévő levegőlencse, kettő pedig ugyanilyen törésmutatójú üveglencse.*

*Az üvegben, az optikai tengelyen, a domborúan homorú lencsétől* 60 cm*-re egy pontszerű fényforrás van. A lencse másik oldalán, tőle* 30 cm *távolságra helyezkedik el a homorúan domború levegőlencse. Ettől* 10 cm *távolságra van az üveget határoló sík felület, amely merőleges az optikai tengelyre. A sík felülettől* 10 cm*-re található az üvegből készült domborúan homorú lencse, a negyedik (homorúan domború) lencse pedig a harmadiktól* 20 cm*-re van.*




*A négy lencse hová képezi le a pontszerű fényforrást?*

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc*, Budapest

**Megoldás.** Az $r=\pm5$ cm és $R=\pm10$ cm görbületi sugarú lencsék fókusztávolsága az

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$$

összefüggés szerint balról jobbra rendre +30 cm, −30 cm, −20 cm és +20 cm. (A relatív törésmutató a levegőben lévő üveglencsék esetében a megadott $n = 1{,}5$ érték, az üvegben lévő levegőlencséknél pedig $n' = 1/n = 2/3$.)

A fényforrás az első (gyűjtő)lencse kétszeres fókusztávolságú pontjában helyezkedik el, így a kép is ugyanilyen távol, a második (szóró)lencse jobb oldali fókuszpontjában jönne létre (ha nem lenne ott a második lencse). A második lencse a fókuszpontja felé tartó fénysugarakat az optikai tengellyel párhuzamosan engedi tovább, így azok az üvegből irányváltoztatás nélkül kilépve ugyancsak párhuzamosan esnek a harmadik lencsére. Ez a lencse úgy szórja a fényt, mintha a bal oldali fókuszpontjából érkeznének a sugarak. Mivel ez a pont a negyedik (gyűjtő)lencse kétszeres fókusztávolságú pontja, a keletkező kép a jobb oldali kétszeres fókusztávolságú pontban, vagyis a lencsétől 40 cm távolságban alakul ki.

*Több dolgozat alapján*

22 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

**P. 5096.** *Egy* 4 cm *sugarú tömör, homogén üveggömb középpontjától* 10 cm*-re van egy* 2 mm *sugarú, világító, kicsiny körlap. A körlap síkja merőleges a kör és a gömb középpontját összekötő egyenesre (az optikai tengelyre). Hol keletkezik és mekkora lesz e körlapnak az üveggömb által előállított képe? (Az üveg törésmutatója* 1,5, *és a képalkotásban csak az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarak vesznek részt.)*

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

**Megoldás.** Az $R$ sugarú üveggömb ún. vastag lencsének tekinthető, amelynek fókusztávolságára általános esetben érvényes::

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{n-1}{n}\frac{d}{R_1 R_2}\right).$$

Esetünkben (gömblencsénél) $R_1 = R_2 = R = 4$ cm, $d = 2R = 8$ cm és $n = 1{,}5$, vagyis

$$f = \frac{nR}{2(n-1)} = 6 \text{ cm}.$$

A vastag lencsékre akkor érvényes a leképezési törvény szokásos

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

alakja, ha a $t$ tárgytávolságot és a $k$ képtávolságot az ún. fősíkoktól mérjük. A gömblencse fősíkjai a gömb középpontján áthaladó síkok (lásd pl. *Vermes Miklós* cikkét a KöMaL 1967. évi 11. számában; `http://db.komal.hu/scan/1967/11/`).

Jelen esetben $t = 10$ cm, így a képtávolság

$$k = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{t}\right)^{-1} = \frac{tf}{t-f} = 15 \text{ cm},$$

és a nagyítás

$$N = \frac{k}{t} = 1{,}5.$$

A kicsiny, világító körlap képe tehát az üveggömb középpontjától 15 cm-nyire, a gömb szélétől 11 cm távolságban jön létre, és a kép 3 mm sugarú körlap lesz.

*Mácsai Dániel* (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 10. évf.)

20 dolgozat érkezett. Helyes Andorfi István, Bonifert Balázs, Fülöp Sámuel Sihombing, Mácsai Dániel, Olosz Adél, Sal Dávid, Tiefenbeck Flórián és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–3 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

**P. 5110.** *A Föld körül keringő két mesterséges hold pályájának fél nagytengelye ugyanakkora. A holdak pálya menti sebességeinek aránya a perigeumban (földközelpontban)* $\frac{3}{2}$, *és az itt nagyobb sebességű hold pályájának excentricitása* 0,5.

*Határozzuk meg pálya menti sebességük arányát az apogeumban (földtávolpontban), és számítsuk ki a másik mesterséges hold pályájának excentricitását!*

(*6 pont*) *Csillagászati versenyfeladat nyomán*

**Megoldás.** Az általános sebességképlet ellipszispályán való keringés esetén:

$$v = \sqrt{\gamma M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

ahol $\gamma$ és $M$ konstansok, $a$ a fél nagytengely (ami a két műholdnál ugyanakkora), $r$ pedig a vezérsugár pillanatnyi nagysága.

*Megjegyzés.* A fenti képlet megtalálható a „Négyjegyű függvénytáblázatokban”, de könnyen levezethető az energiamegmaradás törvényéből és a Newton-féle mozgásegyenletből, ha felhasználjuk az ellipszis görbületi sugarának formuláját pl. a perigeumban.

Ezek szerint a két mesterséges hold sebességének aránya tetszőleges $r_1$ és $r_2$ vezérsugaraknál:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}}{\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a}}}.$$

Perigeumban

$$r_{1,2} = a - c_{1,2} = a(1 - e_{1,2}),$$

apogeumban

$$r_{1,2} = a + c_{1,2} = a(1 + e_{1,2}),$$

ahol $e = c/a$ a kérdéses pálya (numerikus) excentricitása.

Tudjuk, hogy $e_1 = \frac{1}{2}$, így a perigeumban

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{\frac{2}{1-e_1} - 1}{\frac{2}{1-e_2} - 1} = \frac{3}{\frac{2}{1-e_2} - 1}.$$

Ebből megkapjuk a másik pálya excentricitását:

$$\frac{4}{3}=\frac{2}{1-e_2}-1 \quad\Rightarrow\quad 1-e_2=\frac{2}{\frac{4}{3}+1}=\frac{6}{7} \quad\Rightarrow\quad e_2=\frac{1}{7},$$

valamint a sebességek arányát az apogeumban:

$$\frac{v_1'}{v_2'}=\sqrt{\frac{\frac{2}{1+e_1}-1}{\frac{2}{1+e_2}-1}}=\sqrt{\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{7}{4}-1}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}.$$

*Varga Vázsony* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 3 dolgozat.

**P. 5124.** *a) Vízszintes asztallapra két egyforma, tömör hengert helyezünk közvetlenül egymás mellé, majd óvatosan egy ugyanilyen, harmadik hengert rakunk rájuk. Legalább mekkora legyen a hengerek közötti, illetve a hengerek és az asztal közötti súrlódási együttható, hogy ez az elrendezés egyensúlyban maradhasson?*

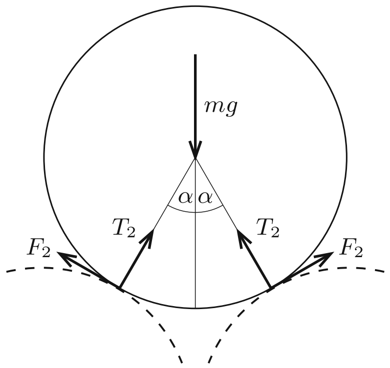
*b) Vízszintes asztallapra három egyforma, tömör gömböt helyezünk közvetlenül egymás mellé, majd óvatosan egy ugyanilyen, negyedik gömböt rakunk rájuk. Legalább mekkora legyen a gömbök közötti, illetve a gömbök és az asztal közötti súrlódási együttható, hogy ez az elrendezés egyensúlyban maradhasson?*

(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

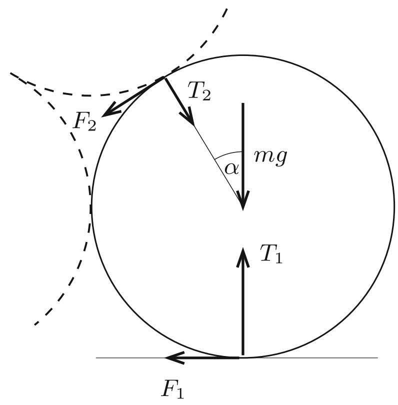
**Megoldás.** *a*) Legyen a hengerek közötti sugárirányú tartóerő (nyomóerő) $T_2$, a közöttük fellépő, érintő irányú súrlódási erő $F_2=T_2\mu_2$; az alsó testek és a talaj között fellépő tartóerő $T_1$, a súrlódási erő pedig $F_1=T_1\mu_1$. (Itt $\mu_1$ és $\mu_2$ az alsó és a felső érintkezési pontokhoz tartozó kritikus súrlódási együtthatókat jelöli, vagyis azt az értéket, amelynél még éppen nem csúszik meg egyik henger sem.)

A felső testre ható erőket az *1. ábra,* az egyik alsó testre ható erőket a *2. ábra* mutatja. A hengerek tengelyének merőleges metszete egy szabályos háromszöget alkot, ezért $\alpha=30°$.

*Megjegyzés.* Feltételezzük, hogy két alsó henger éppen nem érintkezik egymással, így nem fejtenek ki egymásra erőt. Elvben elképzelhető, hogy ez nem teljesül, mert a két alsó




*1. ábra*




*2. ábra*

henger is egymásnak szorul. Belátható, hogy ebben az esetben mindkét súrlódási együtthatónak nagyobbnak kellene lennie, mint az összeszorulás-mentes elrendezésben. Mivel ebben a feladatban a *legkisebb* (az egyensúlyhoz még éppen elegendő) súrlódási együtthatókat keressük, az összeszorulás lehetőségét a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatjuk.

Felírhatjuk, hogy a felső és az alsó testre ható erők függőleges komponensei (külön-külön) egyensúlyban vannak, továbbá az alsó testre ható vízszintes erőkomponensek és a forgatónyomatékok eredője is nulla:

$$mg = 2T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha), \tag{1}$$

$$mg = T_1 - T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha), \tag{2}$$

$$\mu_1 T_1 = T_2(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha), \tag{3}$$

$$\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2. \tag{4}$$

Ezekből (algebrai átalakítások után) a

$$\mu_2 = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin(30^\circ)}{1+\cos(30^\circ)} = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}27,$$

$T_1 = 3T_2$, valamint a

$$\mu_1 = \frac{T_2}{T_1}(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}09$$

eredményt kapjuk.

*A hengeres testek között legalább* 0,27-*nek, az alsó hengerek és az asztal között pedig legalább* 0,09-*nek kell lennie a súrlódási együtthatónak, hogy a testek egyensúlyban maradhassanak.*

*b*) A fentiekhez hasonlóan tárgyalható a tömör gömbök egyensúlyának feltétele is. A gömbök középpontjai szabályos tetraédert alkotnak, ezért a felső és az alsó gömbök között fellépő erők függőlegessel bezárt szöge $\alpha = 35{,}3^\circ$.

A felső testre három tartóerő és három súrlódási erő hat, ezért az első egyenlet kissé módosul:

$$mg = 3T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha). \tag{1'}$$

A többi egyenlet nem változik (az $\alpha$ változásán kívül):

$$mg = T_1 - T_2(\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha), \tag{2'}$$

$$\mu_1 T_1 = T_2(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha), \tag{3'}$$

$$\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2. \tag{4'}$$

Ezekből következik, hogy $T_1 = 4T_2$, továbbá

$$\mu_2 = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin(35{,}3^\circ)}{1+\cos(35{,}3^\circ)} = 0{,}32,$$

$$\mu_1 = \frac{\sin 35{,}3^\circ - 0{,}32\cos 35{,}3^\circ}{4} = 0{,}08.$$

*Négy egyforma, homogén gömb esetében a gömbök között legalább* 0,32-*nek, a gömbök és az asztal között pedig legalább* 0,08-*nak kell lennie a súrlódási együtthatónak, hogy a rendszer egyensúlyban maradhasson.*

*Tiefenbeck Flórián* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a három henger esetében a fellépő erők egy síkban hatnak! Ez azt jelenti, hogy az egyensúly feltétele független attól, hogy hengerek vagy gömbök állnak az asztalon. (A gömbök esetében is egy síkban hatnak az erők, és ebben a síkban a hengerek és a gömbök metszete megegyezik.) Ezt felhasználva a feladatban szereplő két konkrét problémát általánosíthatjuk. Legyen $n$ darab $(1 < n \leqslant 5)$ egyforma gömb az asztalon olyan módon elhelyezve, hogy mindegyik két másikkal ér össze, és a középpontjaik egy $n$ oldalú szabályos sokszöget alkotnak (kivéve az $n = 2$ esetet, amelynél a középpontok egy egyenesen helyezkednek el). Fontos, hogy bár összeérnek az asztalon lévő gömbök, de nem fejtenek ki egymásra erőt.

A megoldás menete hasonló a fentebb leírtakkal, és a súrlódási együtthatókra adódó eredmény:

$$\mu_{\text{test-test}} \geqslant \frac{1}{2\sin(\pi/n) + \sqrt{4\sin^2(\pi/n) - 1}},$$

$$\mu_{\text{test-asztal}} = \frac{1}{n+1}\,\mu_{\text{test-test}}.$$

Ezekből $n = 2$ esetén megkapjuk az *a*) kérdésnek, $n = 3$ esetén pedig a *b*) kérdésnek megfelelő eredményt.

*Máth Benedek* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

16 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos 4 pont) 4, hiányos (2–3 pont) 4, hibás dolgozat.

## Nemzeti csillagászati verseny és diákolimpiai válogató középiskolásoknak 2019–2020

Érdekel a csillagászat és az űrkutatás, és nem áll tőled távol a fizika és a matematika sem? Hazai vagy határon túli, magyar ajkú középiskolás diákként tanulsz a 2019/20-as tanévben?

*Akkor ne habozz – jelentkezz, és érdeklődj fizikatanárodnál!*

Vegyél részt az iskolákban lebonyolítandó háromfordulós versenyen, amelyre a felkészülésedet irodalomjegyzékkel, online segédanyagokkal és megoldásokkal ellátott gyakorló feladatsorokkal is segítjük!

Ha bekerülsz a legjobb teljesítményt nyújtó 20-25 diák közé, részt vehetsz tavasszal az országos döntőben, ahol a díjazottakat értékes nyereményekben részesítjük – egyúttal akár a 2020-as, kolumbiai csillagászati és asztrofizikai diákolimpiára készülő 10-12 fős magyar nemzeti keret tagjává is válhatsz.

**Jelentkezési határidő** (egyben az 1. iskolai forduló időpontja):

**2019. október 15. (kedd).**

**Részletes információk:** `http://www.bajaobs.hu/ioaa/`.

## Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

**2019. október 11-én**

pénteken délután $15^{\mathrm{h}}$-tól $20^{\mathrm{h}}$-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.

A helyszínek és a versennyel kapcsolatos minden további információ megtalálható a verseny honlapján:

`http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

**Versenybizottság**

## Fizikából kitűzött feladatok

**M. 388.** Vizsgáljuk meg, hogy egy (rövidáruboltban kapható) gumiszál (vagy gumiszalag) mennyire követi a lineáris erőtörvényt! Mérjük meg a gumiszál hosszát növekvő és csökkenő terhelés esetén is!

(*6 pont*) Közli: *Nagy Piroska Mária,* Budapest

**G. 677.** Egyenletesen lépegetünk másodpercenként egyet. Minden lépésünk 0,5 m hosszú. Mozgásunk a következő szabályt követi: egyet lépünk előre, kettőt hátra, majd hármat előre, négyet hátra, azután ötöt előre, hatot hátra és így tovább.

*a*) Hol leszünk egy perc múlva?

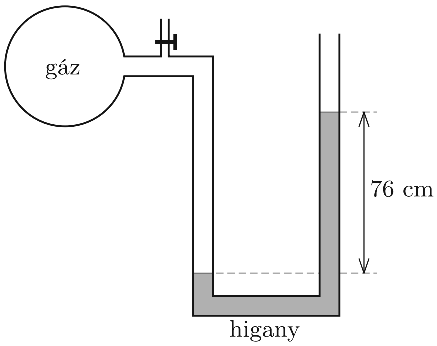
*b*) Mennyi a sebességnagyságunk átlaga?

*c*) Mennyi a sebességvektorunk átlagos értéke?

(*3 pont*)

**G. 678.** Egy autó 36 km/h sebességgel halad a városban, miközben kerekei tisztán gördülnek. Mekkora a kerék legelöl lévő pontjának a talajhoz viszonyított sebessége?

(*3 pont*)




**G. 679.** Egy tartályban lévő gáz nyomását U alakú csőben lévő higany segítségével mérjük meg az *ábrán* látható módon.

*a*) Mekkora a gáz abszolút nyomása, ha az U alakú cső két szárában a higanyszintek különbsége 76 cm, továbbá a külső légnyomás 1 atm?

*b*) Ezután a gázt teljesen kiszivattyúzzuk a tartályból az ábrán látható csaphoz csatlakoztatott szivattyú segítségével. Hogyan helyezkedik el ekkor a higany?

(*3 pont*)

**G. 680.** Egyszerre megrántjuk egy kifeszített gumikötél mindkét végét, az egyiket felfelé, a másikat lefelé. Így két hullám indul el egymás felé az *ábrán* látható módon.

A két szimmetrikus hullám azonos nagyságú energiát szállít. A két jel találkozásakor a gumikötél egy pillanatra egyenessé válik. Hová tűnik ekkor a két hullám energiája? Áthaladnak-e egymáson a jelek, vagy végleg kioltják egymást?

(*4 pont*)

**P. 5143.** Lehet-e olyan sötét éjszaka a Holdon, hogy csak a csillagok világítanak

*a*) a Hold felénk eső oldalán, illetve

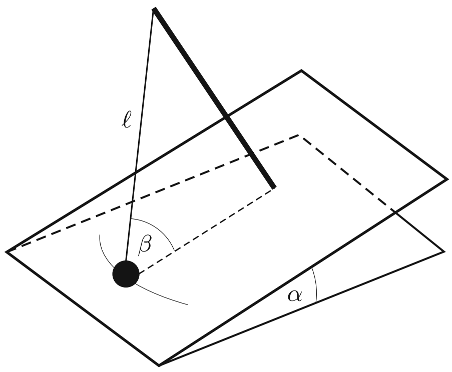
*b*) a Hold túlsó oldalán?

(*4 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kunfehértó

**P. 5144.** Egy $\alpha$ hajlásszögű lejtő síkjára merőlegesen tartórudat rögzítünk. A rúd tetejéhez hozzáerősítjük egy $\ell$ hosszúságú fonálinga felső végpontját. Az inga fonala $\beta$ szöget zár be a lejtő síkjával.

Mekkora az inga kis amplitúdójú lengéseinek periódusideje, ha $\alpha + \beta < 90°$, és a súrlódás elhanyagolható?

(*4 pont*)

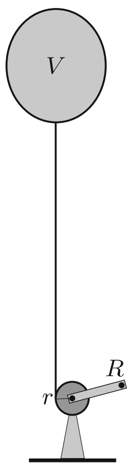



**P. 5145.** A vissza nem térő üstökösök többsége közvetlenül a Naprendszer legkülső tartományából, az ún. Oort-felhőből kerül a Naprendszer belsejébe. Adjunk becslést arra, hogy mennyi ideig tart ez az út! A Nap körül szimmetrikusan, gömbhéj alakban elhelyezkedő Oort-felhő átmérője 70 000 csillagászati egység. Tegyük fel, hogy az üstökös aphéliuma (a Naptól való legnagyobb távolsága) az Oort-felhő sugarával egyezik meg.

(*4 pont*) *Csillagászati olimpiai feladat*

**P. 5146.** Egy üvegpohárban a víz felülete a pohár falánál homorú, a higany felülete viszont domború. Létezik-e olyan alakú üvegedény, amelynek falánál a higany felülete is homorú?

(*4 pont*)




**P. 5147.** A Pécs–Pogány Repülőtéren repülőnapot rendeznek. Reklám céljából egy $V = 10\ \mathrm{m}^3$ térfogatú, héliummal töltött ballont engednek a magasba súlytalannak tekinthető kötélen. A ballon anyagának térfogata elhanyagolható, töltetlen tömege $m = 2$ kg. A hőmérséklet a ballon belsejében, illetve annak külső környezetében $T = 300$ K, a külső légnyomás $p_0 = 10^5$ Pa. A ballon anyagának rugalmasságából származó nyomástól eltekintünk.

A rendezvény végén a ballont csörlővel lassan levonják. A csörlő hengerének sugara $r = 10$ cm, a hajtókar sugara $R = 30$ cm. A közegellenállás elhanyagolható.

*a*) Mekkora erőt kell a hajtókarra kifejteni a ballon egyenletes lehúzása esetén?

*b*) Mekkora teljesítmény szükséges a levonáshoz, ha a ballon $v = 1$ m/s sebességgel süllyed?

(*4 pont*) *Párkányi László fizikaverseny,* Pécs

**P. 5148.** Egy 1 méter hosszúságú, hengeres tartályban levegő van bezárva. A tartályt a vízszintes hossztengelye irányában állandó gyorsulással mozgatjuk, miközben a bezárt levegő hőmérsékletét mindvégig állandó, $T = 273$ K értéken tartjuk. Mekkora $a_0$ gyorsulásnál lenne a tartály elején a levegő nyomása

*a*) 0,1%-kal kisebb,

*b*) fele akkora,

mint a tartály hátulján?

*Útmutatás:* ha a hőmérséklet állandó lenne, a földi légkör sűrűsége a barometrikus magasságformula szerint változna: $\varrho(h) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}$, ahol $M$ a levegő átlagos móltömege.

(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

**P. 5149.** Egy fizikatanár röpdolgozatot írat két csoportban. Az egyik csoport feladata a következő: „Mekkora beesési szögű az a vékony fénysugár, ami gömb alakú vízcseppbe lépve szabályos háromszög mentén jár körbe?" A másik csoport ugyanezt a feladatot kapja, de ekkor szabályos négyszög, vagyis egy négyzet oldalélei mentén kell haladnia a fénysugárnak. Feladhatja-e a tanár ugyanezt a példát a pótdolgozatban szabályos ötszöggel? Határozzuk meg a beesési szögeket az egyes esetekben! (A víz törésmutatója $\frac{4}{3}$.)

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

**P. 5150.** Két teljesen egyforma, $n = 1{,}5$ törésmutatójú üvegből készített síkdomború, vékony lencse közül az egyiknek a sík, a másiknak a domború felületét tesszük tükrözővé. Mekkora az így kapott két leképező eszköz fókusztávolságának aránya?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

**P. 5151.** Homogén elektrosztatikus erőtérben egy $AB$ egyenes szakaszon a mérések szerint a potenciál értéke az $A$-tól vett $x$ távolság függvényében:

| $x$ [cm] | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $U$ [V] | 130 | 150 | 180 | 210 | 230 |

Határozzuk meg közelítőleg a térerősség $AB$ menti komponensének nagyságát!

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

**P. 5152.** Mennyi a valószínűsége, hogy a 131-es jód egy atomja a következő percben elbomlik? (A felezési idő: $T_{1/2} = 8$ nap.)

(*4 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

**P. 5153.** Két egyforma, homogén rúd egy-egy végpontja csuklósan kapcsolódik egymáshoz. A rudak vízszintes, súrlódásmentes asztallapon egy egyenes mentén nyugszanak. Az egyik rúd szabad végére a rúdra merőleges irányban hirtelen ráütünk, mire az a pont 1 m/s sebességgel kezd el mozogni. Milyen irányban és mekkora sebességgel indul el a másik rúd szabad végpontja?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

**Beküldési határidő: 2019. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518**

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 6. September 2019)

### Problems in Mathematics

**New exercises for practice – competition K** (see page 352): **K. 624.** The integers 0 to 9 are arranged along a straight line in some order. *a*) Find a possible arrangement in which the sum of any three adjacent numbers is less than 15. *b*) Is there an arrangement of this kind if 0 is not included in the numbers? **K. 625.** How many six-digit numbers are there in which each digit occurs exactly as many times as its value? **K. 626.** The table below shows the statistics of a round-robin football championship of four participating teams. Teams are listed in alphabetical order of their names. Every team played every other team exactly once. The winner of each game scored 3 points, the losing team scored 0, and in a draw each team scored 1 point.

| Team | Points | Goals For | Goals Against |
|---|---|---|---|
| Headers | 1 | 4 | 6 |
| Left Foot FC | | 8 | 4 |
| Right Foot FC | | 4 | 4 |
| Sprinters | 1 | 4 | 6 |

Given that the result of the Left Foot–Right Foot game was 3-1, and that the Headers scored a goal in every game they played, determine the result of each individual game.

**K. 627.** The teacher selects a student from a class at random. The probability of selecting a boy is 2/3 of the probability that he selects a girl. What fraction of the whole class are girls? **K. 628.** Four identical rectangular sheets of paper are placed on the table to form a larger rectangle without gaps or overlaps. The area of the resulting rectangle is $1200\ \mathrm{cm}^2$. Given that it is not possible to transfer any rectangle to any other only by translation, find the perimeter of the large rectangle.

**New exercises for practice – competition C** (see page 353): **Exercises up to grade 10: C. 1553.** Determine the constant term of the expression $\left(x^{12}+\frac{1}{x^{18}}\right)^{25}$. **C. 1554.** One side of a rectangle is $\frac{1+\sqrt5}{2}$ times as long as the other side. The rectangle is dissected and put together to form a square of the same area. What is the ratio of the diagonal of the rectangle to the diagonal of the square? **Exercises for everyone: C. 1555.** Solve the equation $x+y^2=4z^2$ over the set of positive prime numbers. **C. 1556.** The interior angle bisector drawn from vertex $C$ of triangle $ABC$ intersects the opposite side at point $P$. The distance of point $P$ from the sides is $\frac{24}{11}$, and $AC=6$, $BC=5$. Find the length of side $AB$. **C. 1557.** Two numbers are selected at random from the set of two-digit positive integers. What is the probability that they will have a digit in common? **Exercises upwards of grade 11: C. 1558.** Depending on the value of the nonzero parameter $a$, how many points do the circle $x^2+y^2=1$ and the parabola $y=ax^2-1$ have in common? **C. 1559.** The base of a tetrahedron is a regular triangle, and the three lateral faces unfolded and laid on the plane form a trapezium with sides 10, 10, 10 and 14 units of length. Find the sum of the lengths of all edges of the tetrahedron, and also find its surface area.

**New exercises – competition B** (see page 354): **B. 5038.** Let $P$ be a point in the interior of a regular octagon $ABCDEFGH$. Show that the sum of the areas of triangles $ABP$, $CDP$, $EFP$ and $GHP$ equals the sum of the areas of triangles $BCP$, $DEP$, $FGP$ and $HAP$. (*3 points*) **B. 5039.** Every entry in a $2019\times2019$ table is either $(+1)$ or $(-1)$. If the sum of each row and the sum of each column are calculated, how many different numbers may be obtained at most? (*3 points*) (Proposed by *I. Blahota,* Nyíregyháza) **B. 5040.** In a square $ABCD$, let $F$ be an interior point of side $AB$, and let $E$ be an interior point of side $AD$. Draw a perpendicular to line $CE$ at point $E$, and a perpendicular to line $CF$ at point $F$. Denote the intersection of the two perpendiculars by $M$. Given that the area of triangle $CEF$ is half the area of pentagon $BCDEF$, prove that point $M$ lies on diagonal $AC$ of the square. (*4 points*) **B. 5041.** An $n\times n$ table of real numbers in each field is called a zero square if the sum of the numbers in every $2\times2$ square part of it (therefore in the whole table, too) is zero. (The *diagram* shows a $3\times3$ example.) What is the largest possible $n$ for which there exists an $n\times n$ zero square such that the entries are not all zeros? (*5 points*) **B. 5042.** The convex quadrilateral $ABCD$ is not a trapezium, and diagonals $AC$ and $BD$ are equal in length. Let $M$ denote the intersection of the diagonals. Show that the other intersection (different from $M$) of the circles $ABM$ and $CDM$ lies on the angle bisector of angle $BMC$. (*4 points*) **B. 5043.** Prove that the set $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ has an odd number of nonempty subsets in which the arithmetic mean of the elements is an integer. (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5044.** Let $D$ be a point in the interior of side $AB$ in triangle $ABC$, and $E$ be a point in the interior of side $AC$. The intersection of line segments $BE$ and $CD$ is $M$. Let $x$ denote the area of triangle $BCM$, and let $y$ denote the area of triangle $EDM$. Prove that $T_{ABC}\geqslant x\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. (*6 points*) **B. 5045.** For which positive integers $n$ is there an appropriate order $a_1,a_2,\ldots,a_n$ of the first $n$ positive integers such that the numbers $a_1+1, a_2+2, \dots, a_n+n$ are all perfect powers? (A number is called a perfect power if it can be represented in the form $a^b$, where $a, b \geqslant 2$ are integers.) (*6 points*)

**New problems – competition A** (see page 355): **A. 755.** Prove that every polygon that has a center of symmetry can be dissected into a square such that it is divided into finitely many polygonal pieces, and all the pieces can only be translated. (In other words, the original polygon can be divided into polygons $A_1, A_2, \dots, A_n$, a square can be divided into polygons a $B_1, B_2, \dots, B_n$ such that for $1 \leqslant i \leqslant n$ polygon $B_i$ is a translated copy of polygon $A_i$.) **A. 756.** Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (functions with domain $\mathbb{R}$ and values from $\mathbb{R}$) which satisfy the following two conditions: (*i*) $f(x+1)=f(x)+1$; (*ii*) $f(x^2)=\big(f(x)\big)^2$. (Based on a problem of *Romanian Masters of Mathematics*) **A. 757.** For every $n$ non-negative integer let $S(n)$ denote a subset of the positive integers, for which $i$ is an element of $S(n)$ if and only if the $i$-th digit (from the right) in the base two representation of $n$ is a digit 1. Two players, $A$ and $B$ play the following game: first, $A$ chooses a positive integer $k$, then $B$ chooses a positive integer $n$ for which $2^n \geqslant k$. Let $X$ denote the set of integers $\{0, 1, \dots, 2^n-1\}$, let $Y$ denote the set of integers $\{0, 1, \dots, 2^{n+1}-1\}$. The game consists of $k$ rounds, and in each round player $A$ chooses an element of set $X$ or $Y$, then player $B$ chooses an element from the other set. For $1 \leqslant i \leqslant k$ let $x_i$ denote the element chosen from set $X$, let $y_i$ denote the element chosen from set $Y$. Player $B$ wins the game, if for every $1 \leqslant i \leqslant k$ and $1 \leqslant j \leqslant k$ $x_i < x_j$ if and only if $y_i < y_j$ and $S(x_i) \subset S(x_j)$ if and only if $S(y_i) \subset S(y_j)$. Which player has a winning strategy? (Proposed by *Levente Bodnár,* Cambridge)

## Problems in Physics

(see page 378)

**M. 388.** Investigate how a piece of elastic band (either flat or round, sold in haberdasher's shops) follows Hooke's law. Measure the length of the elastic band when the applied force is increasing and also when the force is decreasing.

**G. 677.** We are walking at a steady rate, one step in a second. Each step is 0.5 m long. The rule is the following: one step forward, two steps backwards, then three steps forward, four steps backwards, five steps forward, six steps backwards and so on. *a*) Where are we after one minute? *b*) What is our average speed? *c*) What is our average velocity? **G. 678.** A car is moving at a speed of 36 km/h, while its wheels roll without slipping. What is the velocity of the forward-most point of a wheel with respect to the ground? **G. 679.** The pressure of a sample of gas in a container is measured by means of a U-shaped tube containing mercury, as shown in the *figure.* *a*) Determine the absolute pressure of the gas in the container, provided that the difference of mercury levels in the two arms of the U-shaped tube is 76 cm and the ambient air pressure is 1 atm. *b*) Then the gas is completely evacuated from the container by a pump attached to the tap shown in the figure. Determine the location of the mercury now. **G. 680.** The two ends of a stretched elastic cord are jerked at the same instant, one end upward, whilst the other downward. Thus two pulses start to move towards each other as shown in the *figure.* The two symmetrical pulses carry the same amount of energy. When the two pulses meet the elastic cord becomes straight for a moment. Where is the energy of the two pulses? Will they pass each other or will they cancel each other?

**P. 5143.** Is it possible that the night on the Moon is so dark that only the light emitted by the stars can be seen *a*) if it is observed from the side of the Moon which faces towards the Earth, or *b*) if it is observed from the other side? **P. 5144.** A rod is fixed perpendicularly to the surface of an inclined plane of angle of elevation $\alpha$. The end of the thread of a simple pendulum of length $\ell$ is attached to the top of the rod. The angle between the thread of the pendulum and the surface of the slope is $\beta$. What is the period of the pendulum when it swings with small amplitude, if $\alpha+\beta<90^\circ$, and friction is negligible? **P. 5145.** The majority of the comets, which pass the inner Solar System only once, come from the outer part of the Solar System called the Oort cloud. Estimate how long this "journey" takes for a comet. The diameter of the Oort cloud, which can be considered a spherical shell with the Sun at its centre, is 70 000 astronomical units. Suppose that the aphelion (the greatest distance measured from the Sun) of the comet is the same as the radius of the Oort cloud. **P. 5146.** The meniscus of the water in a glass is concave, whilst the meniscus of mercury in a glass container is convex at the vertical wall. Is there any shape of a glass container such that the meniscus of mercury in the container is concave at the glass wall as well? **P. 5147.** An air-plane day is organised at Pécs-Pogány airport. For advertisement purposes a helium-filled balloon of volume $V=10\ \mathrm{m}^3$ is launched. The balloon is tethered by a piece of rope of negligible mass. The volume of the fabric of the envelope is negligible, its mass, without the inside gas, is $m=2$ kg. The temperature inside the envelope, and outside, next to the balloon is $T=300$ K, whilst the ambient air pressure is $p_0=10^5$ Pa. The pressure due to the elasticity of the fabric of the envelope can be neglected. At the end of the event the balloon is slowly winched down. The radius of the drum of the winch is $r=10$ cm, whilst the radius of the crank is $R=30$ cm. Air drag is negligible. *a*) What is the magnitude of the force applied on the crank, if the balloon is pulled down uniformly? *b*) What is the power output when the balloon is winched down, if the balloon descends at a speed of $v=1$ m/s? **P. 5148.** There is some air in a 1-metre long horizontal cylinder-shaped container. The container is moved horizontally parallel to its symmetry axis at a constant acceleration, whilst the temperature of the inside air is kept at a constant value of $T=273$ K. At what acceleration $a_0$ would the pressure of the air at the front of the container be *a*) 0.1% smaller than that at the back of the container; *b*) half of the value of pressure at the back of the container? *Hint:* if the temperature is constant, the density of air in the atmosphere of the Earth would change according to the barometric formula: $\varrho(h)=\varrho_0\mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}$, where $M$ is the average molar mass of air. **P. 5149.** A physics teacher gives a short test to two groups of students. The problem given to one of the groups is the following: "What is the angle of incidence of a thin light ray which enters into a spherical water drop and is reflected such that its path inside the drop is an equilateral triangle?" The other group is given nearly the same problem but in their case the path of the light ray in the spherical drop is a square. Can the teacher give the same problem with a regular pentagon-shaped path in the drop as a make-up test question for the missing students? Determine the angle of incidence in each case. (The refractive index of water is $\frac{4}{3}$.) **P. 5150.** We have two alike plano-convex glass lenses, with refractive index of $n=1.5$. The plane face of one of them and the curved surface of the other is silver-coated. What is the ratio of the focal lengths of the gained two optical devices? **P. 5151.** According to the measurements, the potential values in uniform electrostatic field along a straight line segment $AB$ as a function of the distance $x$ measured from point $A$ can be seen in the *table.* Determine the approximate value of the component of the electric field strength which is parallel to $AB$. **P. 5152.** What is the probability that a iodine-131 atom decays in the next minute? (The half-life of iodine-131 is $T_{1/2}=8$ days.) **P. 5153.** Two alike uniform rods are attached to each other with a pivot joint at their ends. The rods are at rest on a frictionless horizontal tabletop, lying along a straight line. Suddenly the free end of one of the rods is hit perpendicularly to the rod such that the endpoint of the rod begins to move at a speed of 1 m/s. Into what direction and at what speed does the free end of the other rod begin to move?