KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 8. szám Budapest, 2019. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

Második nap*

4. *Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (k,n) számpárt, amire*

$$k! = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots\big(2^n-2^{n-1}\big).$$

Matolcsi Dávid megoldása. Legyen

$$T = (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\dots(2^n-2^{n-1}).$$

T-ben a 2 kitevője $0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. A $k!$-ban a 2 kitevője

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{k}{2^i}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{2^i}=k.$$

Tehát, ha $k!=T$, akkor $\frac{n(n-1)}{2}\leqslant k$.

Nyilván $T<(2^n)^n=2^{n^2}$, és

$$k! > \prod_{j=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k} j > \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \geqslant \left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n^2-n}{4}}.$$

Így, ha $T=k!$, akkor

$$2^{n^2} > \left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n^2-n}{4}}.$$

Az $\frac{n^2}{4}$ gyök vonása szigorúan monoton növekvő függvény, így

$$2^4 > \left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Itt $n\geqslant 11$-re

$$\left(\frac{n^2-n}{4}\right)^{\frac{n-1}{n}} > 27^{\frac{10}{11}},\quad \text{és}\quad \frac{27^{10}}{16^{11}} > \frac{1{,}5^{10}}{16} > 1.$$

*Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

Ezek alapján $27^{10} > 16^{11}$, tehát $27^{\frac{10}{11}} > 16 = 2^4$. Vagyis $n \geqslant 11$-re nem teljesülhet az egyenlőség, azaz $n \leqslant 10$.

Az $n=1$-re $T=1$, ekkor $k=1$ jó megoldás; $n=2$-re pedig $T=6$, így $k=3$ is jó megoldás.

Az $n=3$-ra $T=168$, erről könnyen ellenőrizhető, hogy nem írható fel $k!$ alakban.

Az $n=4$-re $T = 15\cdot 14\cdot 12\cdot 8$, ez sem írható föl $k!$ alakban.

Ha $n \geqslant 5$, akkor T osztható $2^n - 2^{n-5} = 31\cdot 2^{n-5}$-nel, tehát osztható 31-gyel.

Így, ha $T=k!$, akkor $k \geqslant 31$. Ekkor viszont $k! > 16^{16} = 2^{64}$, ezért $2^{n^2} > T$ miatt $n > 8$, azaz $n \geqslant 9$, így T osztható $2^n - 2^{n-7}$-nel, ami osztható 127-tel. Ha viszont $k!$ osztható 127-tel, akkor $k \geqslant 127$, így $k! > 60^{60} > 2^{300}$ szerint $n > 17$. Ez azonban lehetetlen, mert már beláttuk, hogy $n \leqslant 10$.

Tehát csak két megoldása van a feladatban szereplő egyenlőségnek: $n=1$ és $k=1$, illetve $n=2$ és $k=3$.

5. *Bath Bankja érméket bocsát ki, melyeknek egyik oldalán H, másik oldalán T betű látható. Harrynek n ilyen érméje van, amelyek előtte balról jobbra, egy sorban vannak elrendezve. Harry ismételten végrehajtja a következő műveletet: ha pontosan $k>0$ olyan érme van, amin H van felül, akkor megfordítja a balról k-adik érmét; máskülönben minden érmén T van felül, és ekkor Harry megáll. Például $n=3$ esetén a THT sorozatból indulva $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ a lépések sorozata, ami három lépés után megáll.*

(a) *Bizonyítsuk be, hogy bármi legyen is a kiindulási sorozat, Harry véges sok lépés után megáll.*

(b) *Minden C kiindulási sorozatra jelölje $L(C)$ azt a lépésszámot, ahány lépés után Harry megáll. Például $L(THT)=3$ és $L(TTT)=0$. Határozzuk meg $L(C)$ átlagos értékét, amint C végigfut a 2^n lehetséges kiinduló sorozaton.*

Nagy Nándor megoldása. (a) Tekintsük azt a mutatót, amely mindig éppen a k-adik érmére mutat. Mivel minden fordítás során k értéke pontosan eggyel változik meg, ezért a fordítás után a mutató H és T esetén rendre balra, illetve jobbra lép egyet.

Hogyha a mutatótól jobbra már nincsen H érme, akkor pontosan k lépésen belül fejeződik be az eljárás, hiszen ekkor az első k érme mind H oldalával van felül.

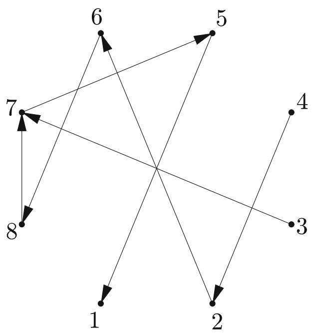
Minden más helyzetben k véges sok lépésben megdönti saját korábbi rekordját. Ennek igazolásához haladjunk végig a rekordokon. Abban az esetben, ha a mutató helyén T van, akkor egyből jobbra lép, k értéke 1-gyel nő, azaz megdöntötte a rekordot. Egyébként pedig egészen addig lép balra, amíg H oldalú érmékre mutat, de lesz tőle balra T oldalú is, hiszen az eltérő esetet már megvizsgáltuk. Ennél az érménél megfordul a mutató mozgása, és az imént T-re fordított elemeken is jobbra fog lépni a mutató, vagyis ismét megdönti a rekordját.

Tehát véges sok lépés alatt elő fog fordulni, hogy az első k érme H oldalával van felül, hiszen a rekord legfeljebb n lehet.

(b) Létezik bijekció az n érméből álló összes állapot és az $n+1$ érméből álló H-ra végződő összes állapot között, amelyre az egyes állapotok irányított gráfja izomorf lesz: A bijekcióhoz fordítsunk minden érmét a túloldalára, ezután az egész sorozatot tükrözzük (eleje és vége helyet cserél) és a sorozat végére tegyünk még egy H érmét.

Az $n=3$ esethez tartozó állapotok:

I.	TTT	TTH	THT	THH	HTT	HTH	HHT	HHH
	1	2	3	4	5	6	7	8
II.	HHHH	THHH	HTHH	TTHH	HHTH	THTH	HTTH	TTTH
	1	2	3	4	5	6	7	8



Az $n=3$ esethez tartozó irányított gráf

Ha az I. esetben k darab H érme volt, akkor a II. esetben $n-k+1$ lesz, így a mutató pozíciója az I. esetben a k., míg a II.-ban az $n-k+1$. helyen van. Mivel az érméket megfordítottuk, tükröztük és a végére tettünk még egy (H) érmét, így az I. esetbeli k. érme a II. esetben éppen az $n-k+1$., és a másik oldala van felül. Tehát a mutató éppen az ellenkező irányba mozog a II. esetben, mint az I. esetben, és a II. esetbeli új állapot éppen az I. esetbeli új állapot bijekció szerinti megfeleltetése.

Az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $L(C)$ várható értéke $\frac{n(n+1)}{4}$. Kiinduló lépésként tekintsük az $n=1$ esetet, ahol valóban $\frac{1}{2}$ a lépésszám várható értéke. Az indukciós lépés során n-ről $(n+1)$-re lépünk, és két esetet különböztetünk meg:

– Ha a sorozat utolsó érméje T (az esetek fele), akkor a mutató pontosan ugyanúgy viselkedik, mint n érme esetén.
– Különben pedig idáig (az utolsó érméig) el kell jutnia egyszer a mutatónak, ami csakis akkor lehet, ha már az összes érme H oldalát mutatja. Minden egyes ilyen lépéssorozatnak a bijekció miatt megfeleltethető egy lépéssorozat az előző esetből, vagyis a mutató a végig H állapotig várható értékben $\frac{n(n+1)}{4}$ lépést fog tenni. Persze még el kell érni a végig T állapotot, ami további $n+1$ lépést igényel.

Mivel a két eset egyformán valószínű, így az $L(C)$ várható értéke a két szám átlaga:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n(n+1)}{4}+(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{4},$$

tehát működik az indukciós lépés.

6. *A hegyesszögű ABC háromszög, amiben $AB \neq AC$, beírt körének a középpontja I. Az ABC háromszög ω beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. A D-ből EF-re bocsátott merőleges egyenes és az ω kör máso-*

dik metszéspontja R. Az AR egyenes és az ω kör második metszésponta P. A PCE és a PBF háromszögek körülírt köreinek második metszéspontja Q.

Bizonyítsuk be, hogy a DI és PQ egyenesek az AI-ra A-ban állított merőleges egyenesen metszik egymást.

Haiman Milán megoldása. Legyen S az A csúcshoz tartozó külső szögfelező metszéspontja ID-vel. Megmutatjuk, hogy PS, (PCE) és (PBF) áthaladnak egy P-től különböző ponton. E pont lesz majd Q, ahonnan következik, hogy P, Q és S az állításnak megfelelően valóban kollineárisak.

A PS egyenes és a (PCE), (PBF) körök P-től különböző közös pontjának megmutatásához alkalmazzunk a beírt körre vonatkozó inverziót. Így a D, E, F, R, P pontok helyben maradnak. Az A, B, C, S pontok inverz képét jelölje rendre A', B', C', S'. Innen már elég megmutatni, hogy $(PS'I)$, $(PC'E)$ és $(PB'F)$ egy P-től különböző pontban találkoznak. Ez azzal ekvivalens, hogy a három kör koaxiális, ami pedig ekvivalens azzal, hogy a középpontjaik kollineárisak.

A három középpont kollineáris elhelyezkedését komplex számok segítségével bizonyítjuk, ahol a beírt kört tekintjük egységkörnek. Legyenek a, d, e, f, p, r, b, c, s az A, D, E, F, P, R, B', C', S' pontoknak megfelelő komplex számok. Az érintők metszéspontjára vonatkozó összefüggés miatt

$$a=\frac{2ef}{e+f}.$$

Ebből $\overline{a}=\frac{2}{e+f}$. Mivel $DR\perp EF$, $dr+ef=0$. Így $r=-\frac{ef}{d}$. Ekkor mivel A rajta van a PR húr egyenesén, $a+pr\overline{a}=p+r$. Ebből p értékére a

$$p=\frac{r-a}{r\overline{a}-1}=\frac{-\frac{ef}{d}-\frac{2ef}{e+f}}{-\frac{ef}{d}\cdot\frac{2}{e+f}-1}=\frac{ef(2d+e+f)}{2ef+de+df}$$

kifejezés adódik.

Következő lépésként számítsuk ki a $(PB'F)$ kör középpontját. Legyen a középpont j_B. A körülírt körre vonatkozó összefüggés alapján

$$j_B=\frac{\begin{vmatrix} p & p\overline{p} & 1\\ f & f\overline{f} & 1\\ b & b\overline{b} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \overline{p} & 1\\ f & \overline{f} & 1\\ b & \overline{b} & 1\end{vmatrix}}.$$

Először a számlálóban álló determinánst számítjuk ki. Tudjuk, hogy $p\overline{p}=f\overline{f}=1$, mivel P és F rajta vannak az egységkörön. Másrészt $b=\frac{d+f}{2}$, mivel B' a DF

szakasz felezőpontja. Ezért $\overline{b}=\frac{d+f}{2df}$. A j_B számlálója így

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 \\ \frac{d+f}{2} & \frac{(d+f)^2}{4df} & 1 \end{vmatrix} = p+\frac{(d+f)^2 f}{4df}+\frac{d+f}{2}-f-\frac{(d+f)^2 p}{4df}-\frac{d+f}{2}=$$

$$=(p-f)\left(1-\frac{(d+f)^2}{4df}\right).$$

A j_B nevezője pedig

$$\begin{vmatrix} p & \frac{1}{p} & 1 \\ f & \frac{1}{f} & 1 \\ \frac{d+f}{2} & \frac{d+f}{2df} & 1 \end{vmatrix} = \frac{p}{f}+\frac{(d+f)f}{2df}+\frac{d+f}{2p}-\frac{(d+f)p}{2df}-\frac{f}{p}-\frac{d+f}{2f}=$$

$$=(f-p)\left(\frac{d+f}{2df}+\frac{d+f}{2pf}-\frac{p+f}{pf}\right).$$

Így j_B értéke

$$\frac{\frac{(d+f)^2}{4df}-1}{\frac{d+f}{2df}+\frac{d+f}{2pf}-\frac{p+f}{pf}}=\frac{p(d-f)^2}{2(pd+pf+d^2+df-2dp-2df)}=$$

$$=\frac{p(d-f)^2}{2(d-f)(d-p)}=\frac{p(d-f)}{2(d-p)}.$$

Ugyanígy a $(PC'E)$ kör j_C középpontja $\frac{p(d-e)}{2(d-p)}$. Ezután számítsuk ki a $(PS'I)$ kör középpontját. Vegyük észre, hogy s a beírt kör D pontjából húzott átmérőre A'-ból állított merőleges talppontja. Ezért

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{e+f}{2}+d+(-d)-d(-d)\overline{\left(\frac{e+f}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e+f}{2}+d^2\frac{e+f}{2ef}\right)=$$

$$=\frac{(e+f)(ef+d^2)}{4ef}.$$

Vegyük észre továbbá, hogy

$$\overline{s}=\frac{e+f}{4}\left(\frac{1}{ef}+\frac{1}{d^2}\right)=\frac{s}{d^2}.$$

A körülírt körre vonatkozó formulát $(PS'I)$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\begin{vmatrix} p & p\overline{p} & 1 \\ s & s\overline{s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \overline{p} & 1 \\ s & \overline{s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{ps\overline{s} - p\overline{p}s}{p\overline{s} - \overline{p}s} = \frac{p\frac{s^2}{d^2} - s}{p\frac{s}{d^2} - \frac{s}{p}} = \frac{p(ps-d^2)}{p^2-d^2}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $\frac{p(d-e)}{2(d-p)}$, $\frac{p(d-f)}{2(d-p)}$ és $\frac{p(ps-d^2)}{p^2-d^2}$ kollineárisak. Alkalmazzunk $\frac{p}{2(d-p)}$ arányú nagyítást, akkor ekvivalens módon azt kell belátnunk, hogy $d-e$, $d-f$ és $\frac{2(ps-d^2)}{p+d}$ kollineárisak. Kiszámítva

$$ps = \frac{ef(2d+e+f)}{2ef+de+df} \cdot \frac{e+f}{4} \cdot \frac{d^2+ef}{ef} = \frac{(2d+e+f)(e+f)(d^2+ef)}{4(2ef+de+df)}$$

értékét,

$$2(d^2-ps) = 2 \cdot \frac{4(2ef+de+df)d^2 - (2d+e+f)(e+f)(d^2+ef)}{4(2ef+de+df)} =$$

$$= \frac{4d^3(e+f) + 8d^2ef - 2d^3(e+f) - d^2(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} +$$

$$+ \frac{-2def(e+f) - ef(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} =$$

$$= \frac{2d^3(e+f) + d^2(-e^2+6ef-f^2) - 2def(e+f) - ef(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} =$$

$$= \frac{(2d-e-f)\big(d^2(e+f) + 4def + ef(e+f)\big)}{2(2ef+de+df)}.$$

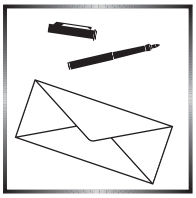
Figyelembe véve, hogy

$$p+d = \frac{2def + e^2f + ef^2 + 2def + d^2e + d^2f}{2ef+de+df} = \frac{d^2(e+f) + 4def + ef(e+f)}{2(2ef+de+df)},$$

adódik, hogy

$$\frac{2(d^2-ps)}{p+d} = \frac{2d-e-f}{2} = \frac{1}{2}\big((d-e)+(d-f)\big).$$

Vagyis $(PS'I)$ középpontja a $(PB'F)$ és $(PC'E)$ középpontjai által meghatározott szakasz felezőpontja. A három középpont tehát kollineáris, az állítást beláttuk. □



Térbe kilépő bizonyítások II.

Vetítés és inverzió

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A második részben olyan példákat veszünk sorra, amikor egy síkbeli alakzatot egy másik síkra vagy egy gömbfelületre vetítünk egy pontból. Az alakzataink pontokból, egyenesekből és körvonalakból fognak állni. Az új helyzetben az ábrának további szimmetriái lesznek, és szimmetriából fog következni a bizonyítandó állítás.

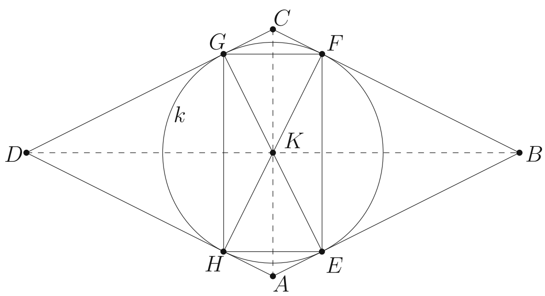
Többször is használni fogunk egy fontos geometriai transzformációt, az *inverziót.* Az inverzió legfontosabb tulajdonságait a Függelékben foglaltam össze.

Körvonal vetítése körvonalra

A módszert először a következő, a cikk előző részéből is ismert tételen mutatom be.

1. példa. *Ha az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre az E, F, G, illetve H pontban érinti, akkor az AC, BD, EG és FH szakaszok egy ponton mennek át.*

A tételt az eddigi eszközeinkkel is sokféleképpen be lehet bizonyítani (lásd az 1.a–1.c feladatokat), de most következzen inkább egy újabb térbe kilépés. Jelöljük k-val a beírt kört, és legyen K az EG és FH húrok metszéspontja. Ha akkora szerencsénk van, hogy K éppen a k középpontja, akkor rengeteg szimmetriát láthatunk az ábrában (*1. ábra*).

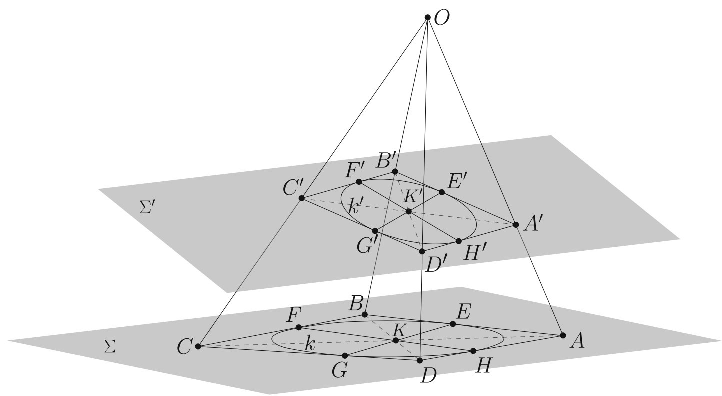


1. ábra

Az $EFGH$ négyszögben az EG és FH átlók a kör átmérői, a K középpontban felezik egymást és egyenlő hosszúak, tehát a négyszög egy téglalap. A téglalap egyik szimmetriatengelye az EF és a GH oldalak közös felezőmerőlegese. Erre a tengelyre szimmetrikusak a körhöz E-ben és F-ben húzott érintők is; ezek metszéspontja,

B tehát rajta van a szimmetriatengelyen. Ugyanígy D is, és persze a téglalap középpontja, K is a tengelyen van. Ugyanezt a másik szimmetriatengelyre is elmondhatjuk, és így látjuk, hogy a K ponton az AC egyenes is átmegy.

Az általános esetben azzal próbálkozunk, hogy az ábra Σ síkját a térben helyezzük el, és valamilyen O pontból egy másik Σ' síkra vetítjük át. Szokás szerint a különböző alakzatok képét vesszővel jelölve, a célunk, hogy a k kör képe, k' az új síkon egy K' középpontú körvonal legyen (*2. ábra*).



2. ábra

Ha ilyen vetítés létezik, akkor a Σ' síkban az előbbi, szimmetrikus ábrát kapjuk meg újra, és már láttuk, hogy az $A'C'$, $B'D'$, $E'G'$, és $F'H'$ szakaszok mind átmennek a K' ponton. Az O-ból visszavetítve a pontokat az eredeti Σ síkra, a bizonyítandó állítást kapjuk.

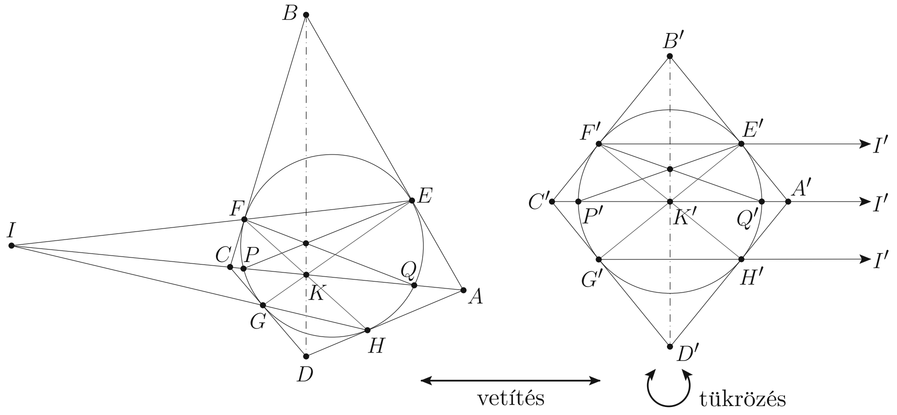
A bizonyításhoz szükséges vetítés mindig létezik, de ez nem magától értetődő; rövidesen mutatok rá egy lehetséges konstrukciót.

Ugyanennek az ötletnek egy másik alkalmazása a következő, néhány évvel ezelőtti KöMaL-feladat.

2. példa. *Az $ABCD$ konvex érintőnégyszögbe írt kör az AB és BC oldalakat az E, illetve az F pontban érinti. Az AC átló a beírt kört a P és a Q pontban metszi; a Q pont az A és a P pontok között helyezkedik el. Mutassuk meg, hogy a BD, EP és FQ egyenesek egy ponton mennek át.* (KöMaL **A. 594.**, 2013. szeptember)

Megoldás. Az 1. példához hasonlóan definiáljuk a G, H és K pontokat, majd az egész ábrát úgy vetítsük egy új síkra, hogy a beírt kör képe körvonal legyen, és a középpontja a K' pont. A vetítés után az ábra szimmetrikus a $B'D'$ egyenesre; speciálisan az $E'P'$ és $F'Q'$ szakaszok egymás tükörképei, ezért a tükrözés tengelyét, a $B'D'$ egyenest ugyanabban a pontban metszik (*3. ábra*).

Az ábrán még egy érdekes pontot megjelöltem: az I pont az EF és GH egyenesek metszéspontja. A vetítés után ezek képei, az $E'F'$ és $G'H'$ párhuzamosak az $A'C'$ egyenessel, és könnyű meggondolni, hogy a vetítéshez használt OI egyenes is párhuzamos velük. Ezért az I' pont nem jön létre, vagy pedig úgy is mondhatjuk,



3. ábra

hogy – a Σ' síkot projektív értelemben kiterjesztve – I' ezeknek az egyeneseknek a közös végtelen távoli, *ideális* pontja.

Érdemes a megoldáshoz felhasznált három transzformáció egymás utánját is megvizsgálni: először a szimmetrikus helyzetbe vetítünk, utána tükrözünk a $B'D'$ egyenesre, végül visszavetítjük a pontokat és egyeneseket az eredeti síkra. Ez a transzformáció felcseréli az A–C, E–F, G–H, P–Q pontpárokat, és fixen hagyja a BD egyenes pontjait. Az EF és GH egyenesek önmaguk képei, ezért a metszéspontjuk, az I pont is fix.

A szorzat transzformációnk a projektív síknak egyfajta tükrözése. Egyenestartó, vagyis egyenesek képe egyenes, van egy tengelye, amelynek minden pontját önmagára képezi, és a tengelyen kívül még egy fixpontja. A sík többi pontjait párosával egymásnak felelteti meg.

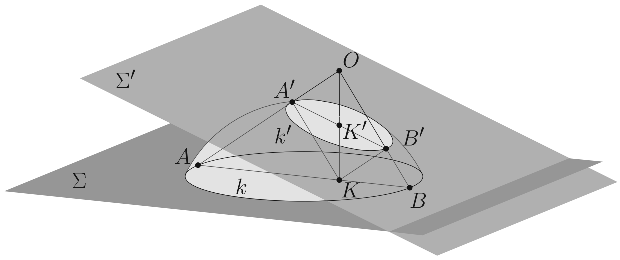
A projektív transzformációkról, ezek osztályozásáról (és főleg a latin neveikről) sokkal többet lehetne írni, de ez most nem cél.

Körvonal vetítése körvonalra térbeli inverzióval

Még adósok vagyunk annak igazolásával, hogy egy körvonalat és egy belső pontját egy másik körvonalba és annak középpontjába lehet vetíteni.

1. lemma. *Legyen k körvonal a Σ síkban, és K a kör egy belső pontja. Ekkor létezik a térben olyan Σ' sík és olyan, a két síkra nem illeszkedő O pont, hogy O-ból vetítve a k kör vetülete a Σ' síkon szintén körvonal, és ennek a körvonalnak a középpontja K vetülete.*

Bizonyítás. Húzzuk meg a k körnek a K ponton átmenő egyik átmérőjét, legyen ez AB. A Σ síkra állítsunk merőleges egyenest a K pontban, és válasszuk ezen az egyik olyan O pontot, amelyre $AOB\sphericalangle$ derékszög. A K pont merőleges vetülete az OA és OB szakaszokon legyen A', illetve B'. Ezek a pontok mind az ABO háromszög síkjában vannak. Az $OA'KB'$ négyszög téglalap, mert az O, A' és B' csúcsainál is derékszöge van. Legyen K' a téglalap középpontja; ekkor tehát az OK és $A'B'$ szakaszok a K' pontban felezik egymást (*4. ábra*).



4. ábra

Tekintsük most az O középpontú, K-n átmenő gömbre való inverziót; ez a k körvonalat egy k' körvonalba képezi. Ennek az új körnek a síkja legyen Σ'.

Az OAK és OBK derékszögű háromszögekben A', illetve B' a derékszögű csúcsnak az átfogóra eső vetülete; a befogótétel miatt $OA\cdot OA' = OB\cdot OB' = OK^2$, tehát az A pont inverzió szerinti képe A', a B pont képe B'. A k' kör tehát átmegy az A' és a B' ponton. A k kör merőleges az ABO síkra, ezért a k' is merőleges rá, tehát a k' körnek az $A'B'$ szakasz átmérője, és így a K' pont a k' középpontja. Az O pontból vetítve a Σ' síkra, a k kör vetülete a k' kör, a K pont vetülete pedig k' középpontja, K'.

Megjegyzés. Nem az imént megszerkesztett O pont (és Σ-ra való tükörképe) az egyetlen, amely eleget tesz az 1. lemma feltételeinek. Végtelen sok lehetséges vetítési középpont létezik, ezzel kapcsolatban lásd a 485. oldalon a **B. 5060.** feladatot.

Körök vetítése gömbfelületre

A továbbiakban két olyan példa következik, amelyekben egyeneseket és körvonalakat vetítünk a síkból egy gömbfelületre.

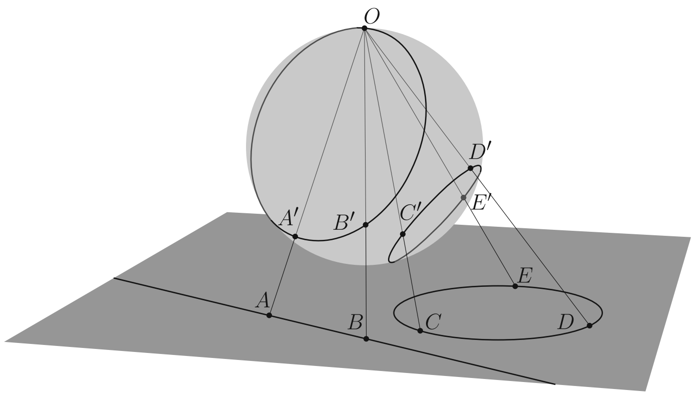
Ha a síkot invertáljuk egy külső pontból, a sík képe egy gömbfelület, egyedül az inverzió pólusa nem áll elő képként. Ezt a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést sztereografikus projekciónak is hívjuk. A síkbeli egyeneseknek és köröknek a gömbfelületen körvonalak felelnek meg; az egyenesek megfelelői azok a körvonalak, amelyek átmennek az inverzió pólusán. (*5. ábra*)

A projektív síkhoz hasonlóan, a síkot kiegészíthetjük egyetlen ideális ponttal, ami az inverzió pólusának felel meg. A sík minden egyenese átmegy ezen az ideális ponton. Az így kapott rendszert hívjuk *inverzív síknak.*

A példáinkban két, közös pont nélküli körvonalat vagy egy kört és egy egyenest fogunk a gömb két párhuzamos körvonalára vetíteni. A következő lemma szerint ez mindig lehetséges.

2. lemma. *a) Ha k egy körvonal és e egy egyenes a Σ síkban, és nincs közös pontjuk, akkor ezekhez létezik a síkon kívül olyan O pont, hogy O-ból invertálva, a k és e képei párhuzamos síkokban fekszenek.*

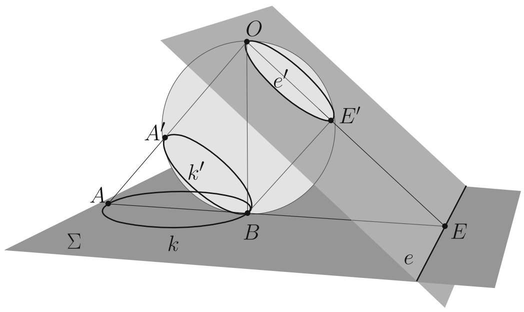
b) Ha k_1 és k_2 két, közös pont nélküli körvonal a Σ síkban, akkor ezekhez létezik a síkon kívül olyan O pont, hogy O-ból invertálva, a k_1 és k_2 képei párhuzamos síkokban fekszenek.



5. ábra

Bizonyítás. Mindkét állításhoz hasonló konstrukciót mutatunk, mint az 1. lemma bizonyításában.

a) Legyen AB a k kör e-re merőleges átmérője, E az e és az AB egyenes metszéspontja. Az A, B pontokat válasszuk olyan sorrendben, hogy B az AE szakasz belsejében helyezkedjen el. Állítsunk B-n keresztül egy Σ-ra merőleges egyenest, és legyen ezen O olyan pont, amelyre $AOE\sphericalangle = 90°$. A B pont merőleges vetülete az OA és OE szakaszokon legyen A', illetve E'. Az $OA'BE'$ négyszög téglalap (*6. ábra*).

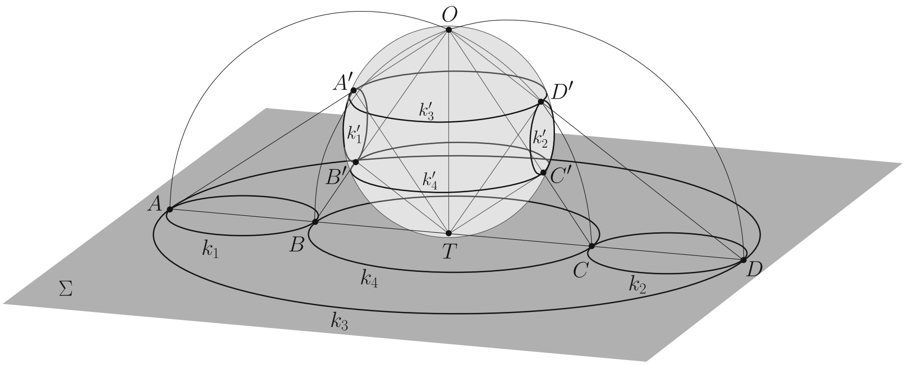


6. ábra

Tekintsük most az O középpontú, B-n átmenő gömbre vonatkozó inverziót. Az A, B, E pontok képe rendre A', B', illetve E', a Σ sík képe az OB átmérőjű gömb. A k és e képei az $A'B$, illetve OE' egyeneseken keresztül, az ABO síkra állított merőleges síkokban fekszenek, amelyek párhuzamosak egymással.

b) Ha a két kör egymáson kívül fekszik, akkor messe a két kör centrálisa a két körvonalat az A, B, illetve C, D pontokban, ebben a sorrendben. A Σ síkra merőlegesen vegyük fel az AC és BD félköröket, ezek metszéspontja legyen O. Legyen O merőleges vetülete a síkon T, és legyen T merőleges vetülete az OA, OB, OC, OD szakaszokon rendre A', B', C', illetve D'. Az O középpontú, T-n átmenő gömbre vonatkozó inverzió a Σ síkot az OT átmérőjű gömbre képezi, ezen belül az A, B,

C, D pontok képe rendre A', B', C', illetve D'. Mivel $A'OC'\sphericalangle = B'OD'\sphericalangle = 90°$, a gömbnek $A'C'$ és $B'D'$ átmérői; emiatt $A'B'C'D'$ is téglalap. A k_1 és k_2 körök képei az $A'B'$ és $C'D'$ átmérőjű, az ABO síkra merőleges körök, amelyek tehát egyenlő sugarúak, és egymással párhuzamos síkokban vannak (*7. ábra*).

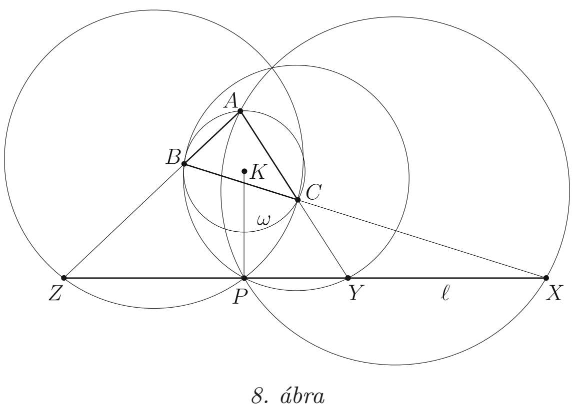


7. ábra

Ha k_1 és k_2 nem egymáson kívül helyezkedik el, akkor az ábrán a k_3 és k_4 körökkel mondhatjuk el ugyanezt.

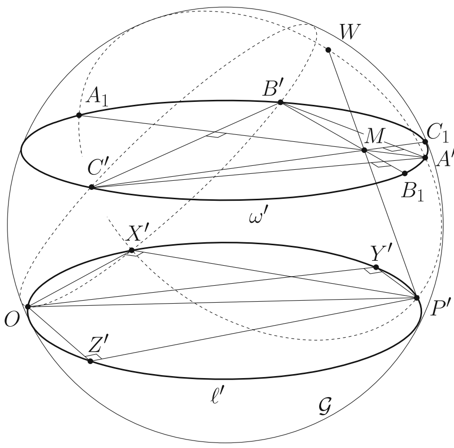
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy mindkét esetben az ABO sík merőleges volt a Σ síkra. Az a) részben az OE egyenes merőleges e-re. Be lehet bizonyítani, hogy csak ilyen tulajdonságú O pontok teljesíthetik a lemma feltételeit.

3. példa. *Legyen az ABC háromszög körülírt köre ω, és ℓ egy egyenes, amelynek nincs közös pontja ω-val. Jelöljük P-vel ω középpontjának merőleges vetületét ℓ-en. A BC, CA, AB oldalegyenesek ℓ-et rendre a P-től különböző X, Y, illetve Z pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az AXP, BYP és CZP háromszögek köré írt köröknek vagy van még egy, P-től különböző közös pontja, vagy pedig P-ben érintik egymást* (8. ábra). (IMO Shortlist 2012/G8; Cosmin Pohoata feladata)



8. ábra

Megoldás. Invertáljuk az ábrát a 2. lemma a) része szerint egy alkalmas O pontból úgy, hogy az ω kör és az ℓ egyenes képei párhuzamos síkokban fekvő körök legyenek. Az egyes objektumok képét most is vesszővel fogjuk jelölni. Az ábra síkjának képe egy $\mathcal{G}$ gömb; ennek felszínén helyezkedik el az ω' kör, ami átmegy az A', B' és C' pontokon, továbbá az ℓ' kör, amely átmegy az X', Y', Z' és P' pontokon és az inverzió pólusán, az O ponton. A 2. lemma konstrukciójában OP merőleges ℓ-re, ezért az OP' szakasz az ℓ' körnek átmérője. A Thalész-tétel miatt tehát $OX'P'\sphericalangle = OY'P'\sphericalangle = OZ'P'\sphericalangle = 90^\circ$ (*9. ábra*).



9. ábra

Az BCX egyenes inverzió szerinti képe egy O-t átmenő körvonal, ezért a B', C', X', O pontok egy körvonalon vannak. Ennek a körnek a síkja az ω' és ℓ' körök egymással párhuzamos síkjait párhuzamos egyenesekben metszi, vagyis a $B'C'$ szakasz párhuzamos OX'-vel.

Legyen A_1 az ω' kör és az $A'P'X'$ kör második, A'-től különböző metszéspontja. Az $A'P'X'$ sík szintén két párhuzamos egyenesben metszi az ω' és ℓ' körök síkjait, ezért $A'A_1$ párhuzamos $P'X'$-vel. Mivel az OX' és $P'X'$ szakaszok merőlegesek, a velük párhuzamos $B'C'$ és $A'A_1$ szakaszok merőlegesek egymásra. Tehát az $A'B'C'$ háromszögben $A'A_1$ a BC oldalhoz tartozó magasságvonal.

Hasonlóan, legyen B_1 és C_1 a ω' kör második metszéspontja a $B'P'Y'$ és $C'P'Z'$ körökkel; ekkor $B'B_1$ és $C'C_1$ az $A'B'C'$ háromszög másik két magassága.

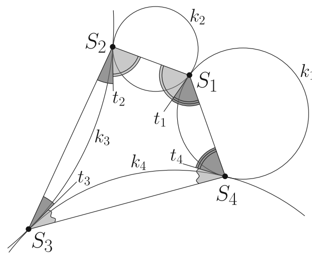
Legyen ezután M az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja, és legyen W a $P'M$ egyenes másik, P'-től különböző metszéspontja a $\mathcal{G}$ gömbbel. Az A', P', X' és W pontok az egymással párhuzamos $A'A_1$ és $P'X'$ szakaszok síkjában, tehát egy körvonalon vannak. Visszainvertálva a síkra azt kapjuk, hogy W képe, W' rajta van az AXP körön. Ugyanígy láthatjuk, hogy a BYP és a CZP kör is átmegy a W' ponton.

Ha a W pont nem jön létre, mert az $P'M$ egyenes érinti a gömböt, akkor az PM' egyenes közös érintője az $A'X'P'$, $B'Y'P'$ és $C'Z'P'$ köröknek, ezért a síkbeli AXP, BYP és CZP körök is érintik egymást a P pontban.

4. példa. *Adottak a síkon a k_0, k_1, k_2, k_3 és k_4 körök úgy, hogy $i = 1, 2, 3, 4$ esetén k_i kívülről érinti k_0-t a T_i pontban, továbbá k_i kívülről érinti k_{i+1}-et az S_i pont-*

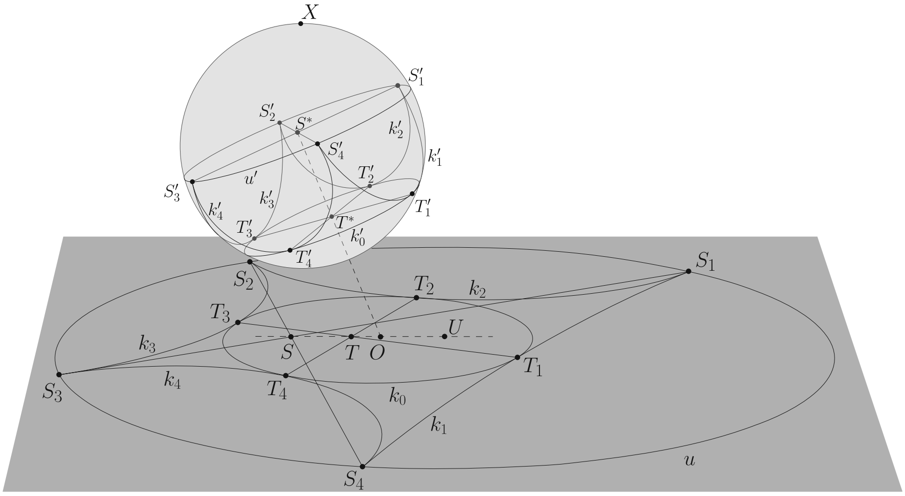
ban ($k_5 = k_1$). Legyen O a k_0 középpontja, T a T_1T_3 és T_2T_4 egyenesek metszéspontja, és legyen S az S_1S_3 és S_2S_4 egyenesek metszéspontja. Igazoljuk, hogy O, T és S egy egyenesen van. (KöMaL **A. 597.**, 2013. október; Mester Márton feladata)

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az S_1, S_2, S_3, S_4 pontok egy körön vannak. Jelöljük t_i-vel a k_1 és k_{i+1} közös belső érintőjét. Az S_iS_{i+1} húrok ugyanakkora szöget zárnak be a t_i és t_{i-1} érintőkkel. Ebből láthatjuk, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög szemközti szögeinek összege egyenlő, $S_1S_2S_3S_4$ húrnégyszög (*10. ábra*). Jelöljük a körülírt körét u-val, u középpontját U-val.



10. ábra

Az u kör S_iS_{i+1} íve a k_{i+1} kör belsejében fekszik, így a k_1, k_2, k_3, k_4 körök lefedik u-t, míg ugyanezek a körök kívülről érintik k_0-t. Ezért a k_0 és u köröknek nincs közös pontja. A 2. lemma *b*) része szerint létezik olyan térbeli inverzió, ami a k_0 és u köröket párhuzamos síkú körökbe viszi. Tekintsünk egy ilyen inverziót; a pólusa legyen X, az egyes objektumok képét most is vesszővel fogjuk jelölni. (*11. ábra*). A sík képe egy gömbfelület, a körök és egyenesek képe egy-egy, a gömbre illeszkedő kör; egymást érintő görbék képei egymást érintő görbék.



11. ábra

Minden egyes i-re a k_i' és u' körök szöge, valamint a k_{i+1}' és u' körök szöge $180°$-ra egészíti ki egymást. Ebből következik, hogy k_1' és k_3', illetve k_2' és k_4' ugyanakkora, $S_1'S_2'S_3'S_4'$ téglalap, $T_1'T_2'T_3'T_4'$ pedig négyzet.

Legyen $S^* = S_1'S_3' \cap S_3'S_4'$ és $T^* = T_1'T_3' \cap T_3'T_4'$ az u', illetve a k_0' kör középpontja. Mivel X, T_i és T_i' egy egyenesre esik, az X, T_i, T_{i+2}, T_i', T_{i+2}' pontok egy síkra esnek ($i = 1, 2$). E két sík metszésvonala XT^*T. Hasonlóan, X, S^*, S egy egyenesen van.

Az XS^*T^* síkra a k_0' és az u' kör is szimmetrikus, ezért az inverzeik is; ezért középpontjaik, O, illetve U a XS^*T^* síkban van.

Az O, U, S, T pontok mindegyike az eredeti sík és az XS^*T^* sík közös részén helyezkedik el, ez a négy pont tehát egy egyenesen van.

Függelék: Az inverzió alaptulajdonságai

Az inverzió egy geometriai transzformáció, síkban és térben is értelmezzük. Síkban a tengelyes, térben a síkra való tükrözéshez hasonlít, de a tengely helyett síkban egy körvonalra, térben egy gömbfelületre „tükrözünk".

A síkbeli inverzió definíciójához vegyünk fel egy O középpontú, r sugarú k kört; az O pont az inverzió középpontja vagy *pólusa;* a k lesz az inverzió *alapköre.* Bármely, O-tól különböző P pontra legyen P' az OP félegyenesnek az a pontja, amelyre $OP \cdot OP' = r^2$; ez a P' a P pont k-ra vonatkozó inverze vagy tükörképe. Az inverzió a sík O-tól különböző pontjait rendeli egymáshoz. Az világos, hogy P' inverze a P pont, és az alapkör pontjai önmaguk inverzei. Ezért is tekinthetjük a k kört egyfajta szimmetriatengelynek.

Bizonyítás nélkül felsoroljuk az inverzió néhány legfontosabb tulajdonságát. Ezek bizonyítása jó gyakorló feladat; hasonló háromszögekkel és az O pont különböző körökre vonatkozó hatványaival nem nehezek.

- Az O-n átmenő egyenesek képei (eltekintve az O ponttól) önmaguk.
- Ha egy egyenes nem megy át O-n, akkor az inverze egy O-n átmenő körvonal, és fordítva: az O-n átmenő körök képei O-ra nem illeszkedő egyenesek.
- Az O-t nem tartalmazó körvonalak képei O-t nem tartalmazó körvonalak.
- Az alapkört merőlegesen metsző körvonalak önmaguk képei.
- Az inverzió érintés-, merőleges- és általában szögtartó: ha a és b két egyenes vagy kör, amelyek az O-tól különböző P pontban α szögben metszik egymást, akkor képeik, a' és b' a P' pontban szintén α szögben metszik egymást.
- Az inverzió kettősviszonytartó: ha A, B, C, D négy pont egy egyenesen vagy körön, akkor $(A,B,C,D) = (A',B',C',D')$.
- Az inverzió szimmetriatartó: ha t egyenes vagy kör, P és Q egymás tükörképe t-re, akkor képeik, P' és Q' is egymás tükörképei t'-re.

A térbeli inverzió definíciója lényegében ugyanaz, csak kör helyett egy O középpontú, r sugarú gömbre invertálunk. Az O-n átmenő síkokon belül a fenti tulajdonságok érvényben maradnak.

- Az O-n átmenő egyenesek és síkok képei (eltekintve az O ponttól) önmaguk.
- Ha egy egyenes nem megy át O-n, akkor az inverze ugyanabban a síkban egy O-n átmenő körvonal, és fordítva: az O-n átmenő körvonalak képei O-ra nem illeszkedő egyenesek.
- Ha egy sík nem megy át O-n, akkor az inverze egy O-n átmenő gömbfelület, és fordítva: az O-n átmenő gömbfelületek képei O-ra nem illeszkedő síkok.
- Az O-t nem tartalmazó gömbfelületek képei O-t nem tartalmazó gömbfelületek.
- Az alapgömböt merőlegesen metsző gömbfelületek önmaguk képei.
- Az egyenesek és körvonalak inverzei is egyenesek vagy körvonalak.

- Az inverzió térben is szögtartó: ha a és b két egyenes, kör, sík vagy gömbfelület, amelyeknek van legalább egy, O-tól különböző pontjuk, és α szögben metszik egymást, akkor képeik, a' és b' szintén α szögben metszik egymást.
- Az inverzió szimmetriatartó: ha $\mathcal{S}$ sík vagy gömbfelület, P és Q egymás tükörképe $\mathcal{S}$-re, akkor képeik, P' és Q' is egymás tükörképei $\mathcal{S}'$-re.

A síkban és a térben is, a definícióban az r^2 helyére negatív számot is írhatunk. Az így módosított definícióban P' az OP egyenesnek az a pontja, amelyre $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \lambda$; ha a λ paraméter pozitív, akkor P' és P az O-nak ugyanazon az oldalán, negatív λ esetén ellentétes oldalon vannak.

További olvasnivaló

Projektív transzformációkról és inverzióról ismét csak Reiman István *Geometria és határterületei* c. könyvét tudom ajánlani.

A bemutatott példákra sokféle más megoldás is létezik; néhányat megtaláltok ezeken a címeken:
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A594`
`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A597`
`https://www.imo-official.org/problems/IMO2012SL.pdf`, 38–41. oldal.

Feladatok

1. *a*) Igazoljuk az 1. példa állítását csupán a kerületi szögek tételének felhasználásával. Legyen az EG és FH szakaszok metszéspontja K, a beírt kör középpontja I, és I merőleges vetülete az AC átlón T. Mutassuk meg, hogy az E, F, K, T, valamint a G, H, K, T pontok is egy-egy körön vannak, és az AC átló átmegy a K ponton.

b) Igazoljuk az 1. példa állítását úgy, hogy felírjuk a Brianchon-tételt az $AEBCGD$ és $ABFCDH$ elfajuló érintőhatszögekre.

c) Igazoljuk az 1. példa állítását úgy, hogy felírjuk a Pascal-tételt az $EEGFFH$, $EGGFHH$, $EEFHHG$ és $EFFHGG$ elfajuló húrhatszögekre.

2. Az $ABCD$ érintőnégyszögben legyen PQ a beírt kör AC-re merőleges átmérője. Tegyük fel, hogy a BP és DQ egyenesek az X, a BQ és DP egyenesek az Y pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy az X és Y pontok az AC egyenesen vannak. (International Olympiad of Metropolises, Moszkva, 2018/2)

3. Adott egy k kör és rajta kívül két pont, A és B. Az A-ból k-hoz húzott érintő szakaszok AC_1 és AC_2, a B-ből k-hoz húzott érintő szakaszok BD_1 és BD_2. Igazoljuk, hogy a C_1C_2 egyenes akkor és csak akkor megy át a B ponton, ha a D_1D_2 egyenes átmegy az A ponton. (Avagy, A polárisa akkor és csak akkor megy át B-n, ha B polárisa átmegy A-n.)

4. Igazoljuk, hogy ha két, egy síkban fekvő körnek nincs közös pontja, akkor van olyan inverzió, amely ezeket a köröket koncentrikus körökbe képezi.

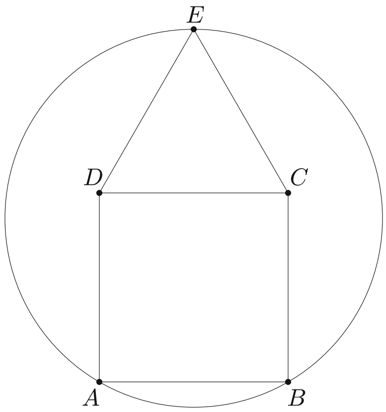
5. Adott a térben két körvonal, k_1 és k_2 úgy, hogy a síkjaik metszik egymást. Mutassuk meg, hogy ha a két kört egymásra lehet vetíteni egy alkalmas O pontból, akkor a két körvonal egymás inverze egy O középpontú inverzió szerint.

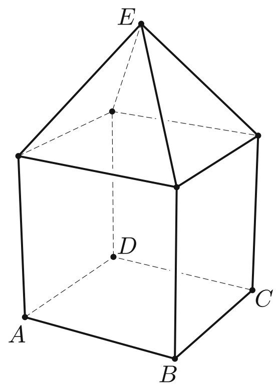
Kós Géza

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) A *bal oldali ábrán* egy 1 cm oldalhosszú négyzet és rajta egy 1 cm oldalhosszú szabályos háromszög látható. Mekkora annak a körnek a sugara, amely átmegy az A, B, E pontokon? (*5 pont*)





b) A *jobb oldali ábrán* egy 1 cm élhosszú kocka és rajta egy olyan 1 cm élhosszú szabályos gúla látható, amelynek minden oldallapja szabályos háromszög. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely átmegy az A, B, C, D, E pontokon? (*7 pont*)

2. Egy 2019 mezőből álló játéktáblánk van a következő *ábra* szerint:

1	2	3	4	5	1	2	...

(Az 1, 2, 3, 4, 5 számok vannak rajta ciklikusan, összesen 2019 hosszan.) Az 1-es mezőről indulunk, és minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám.

a) Összesen hányra lépünk rá a mezők közül? (*4 pont*)

b) Mennyi azon mezők számainak összege, amire nem lépünk rá? (*3 pont*) *c*) A játékszabályokat a következőképpen módosítjuk: egy szabályos hatoldalú kockával dobunk, ha a dobás eredménye az 1 és 5 közötti d szám, akkor az első mező, amire rálépünk az első d; míg ha a dobás hatos, akkor az első 1-esre lépünk, és innentől kezdve minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám. Az első száz mező körül várhatóan hány mezőt látogatunk meg? (*4 pont*)

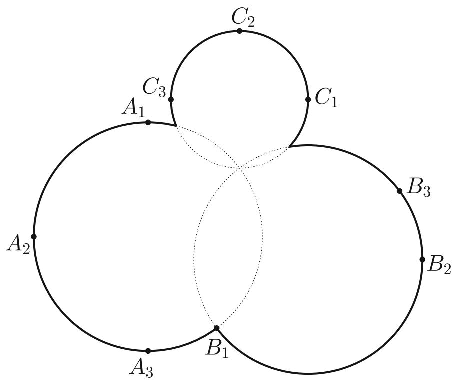
3. Piszkos Fred a kapitány hosszú tengeri útra indul hajójával. Egy 100 literes hordóban tiszta alkoholt visz magával. Fred a hordóból minden éjfélkor megiszik 5 liter löttyöt, majd felmegy a hídra és a hajó kormánykerekét eltekeri 30°-kal. Ezek után visszavonul a kabinjába és a következő éjfélig alszik. A matrózok minden nappal során feltöltik a hordót esővízzel, de a kormánykerékhez nem nyúlnak. Ha a hordó alkoholtartalma 50% alá csökken és a kapitány iszik belőle, akkor kijózanodik.

a) Az indulás után hanyadik éjfélkor józanodik ki Fred? (*4 pont*)

Fred fogadott egy hordó rumba Watson kapitánnyal, hogy az ő hajója gyorsabb, mint Watson fregattja. A verseny április elsején 23 óra 59-kor indult. A két hajó egyszerre indult el a nyugati irányban pontosan 10 000 kilométerre lévő közös célpont, a Rejtő-fok felé. Watson hajója állandó 8 csomó sebességgel haladt, míg Fred teknője 6 csomóval. (1 csomó sebesség megegyezik 1,85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val.) Fred amíg részeg, minden páros sorszámú nap éjfélén balra tekeri 30°-kal a kormánykereket, míg a páratlan sorszámú napokon jobbra; amikor viszont kijózanodik, akkor azonnal a megfelelő irányba állítja a kormánykereket (és a helyes irányt a továbbiakban tartja is). A józan Piszkos Fred továbbá minden éjfélkor képes a hajó aktuális sebességét 10%-kal növelni (és ezt az egész következő nap tartani).

b) Melyik kapitány nyeri a fogadást? (*9 pont*)

4. Az *ábra* egy park térképét ábrázolja. A parkot három körvonal határolja; a körök rendre az $A_1(-2;3)$, $A_2(-7;-2)$, $A_3(-2;-7)$, illetve a $B_1(1;-6)$, $B_2(10;-3)$, $B_3(9;0)$, valamint a $C_1(5;4)$, $C_2(2;7)$, $C_3(-1;4)$ pontok által meghatározott körök köréírt körei.



a) Igazoljuk, hogy az $A_1A_2A_3$, a $B_1B_2B_3$, valamint a $C_1C_2C_3$ háromszögek mind derékszögű háromszögek. (*4 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az A_3, B_1, B_2, valamint a B_3, C_1, C_2, illetve a C_3, A_1, A_2 ponthármasok rendre egy-egy egyenesre esnek. (*3 pont*)

c) A park építésze egy „különleges" helyre kutat szeretne fúratni. Úgy tűnik neki, hogy a parkot alkotó három kör egy közös pontban metszi egymást (ami eléggé különleges lenne). Igaza van-e az építésznek? Ha igen, pontosan hol van ez a pont? (*8 pont*)

II. rész

5. *a*) Adjuk meg a $h(x) = \cos 2x - \sin 2x + 2\sin^2 x + 1$ függvény szélsőértékeit. Hol veszi fel a szélsőértékeit a függvény? (*6 pont*)

b) Legyen $f(x) = x^2 - 2x + 2$, míg a $g_n(x)$ a következőképpen definiált függvény-sorozat:

$$g_1(x) = f(x); \quad g_n(x) = f\big(g_{n-1}(x)\big) \text{ (ha } n \geqslant 2).$$

Adjuk meg $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ tizedesvessző utáni első 100 számjegyét. (*10 pont*)

6. Néhány vegyianyag-szállító kamionban különféle kóddal (A, B, C, D, E, F, G, H) ellátott palackokat szállítanak. A robbanásveszély miatt bizonyos palackokat nem szabad együtt szállítani. Ezeket a „tiltásokat” a következő táblázat tartalmazza:

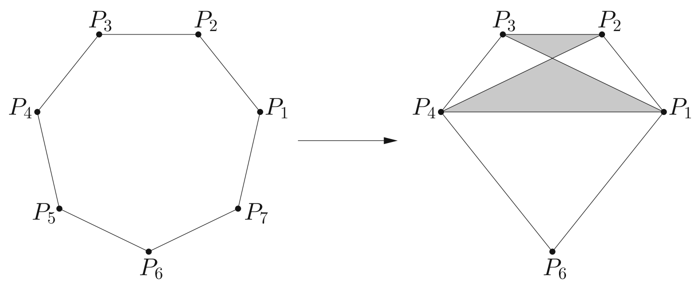
Vegyi anyag címkéje:	A	B	C	D
Ezzel nem szállítható:	B, E, F	A, C, G	B, E, H	F, G
Vegyi anyag címkéje:	E	F	G	H
Ezzel nem szállítható:	A, C, F, H	A, D, E, G, H	B, D, F, H	C, E, F, G

a) Legalább hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan egy-egy palackot kell elszállítanunk? (Minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (*6 pont*)

b) Hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan 5-5 palackot kell elszállítani? (Most is minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (*6 pont*)

c) Véletlenszerűen kiválasztva két különböző palackot mennyi az esélye annak, hogy azokat nem tehetjük egy kamionra? (*4 pont*)

7. Egy cég gyémánt alakú emblémája olyan ötszög, melynek csúcsai egy szabályos hétszög megfelelő (P_1, P_2, P_3, P_4, P_6) csúcsai (lásd *jobb oldali ábra*).



A cég 10 000 darab az emblémával ellátott kitűzőt rendelt. A nyomdai költségekben két tétellel kell kalkulálni: 10 000 centiméternyi vonal megrajzolása 50 euróba kerül, míg 10 000 cm^2-nyi terület besatírozása 200 euróba.

a) Mennyire rúg a 10000 kitűző nyomdai költsége, ha a szabályos hétszög egy-egy oldala 2 cm hosszú? (*10 pont*) *b*) A cég piárosa úgy találta, hogy az embléma nem elég színes. Szeretné a gyémánt 5 összefüggő részében megjeleníteni a piros, a fehér és a zöld színeket. Hányféle különböző ilyen három színű emblémát kaphatunk, ha azt szeretnénk, hogy az élben szomszédos részek színe különböző legyen, valamint mind a három szín meg is jelenjen az emblémában? (*6 pont*)

8. Egy speciális trópusi halaknak való felül nyitott, alul és oldalt üveg akváriumot építünk. Az akvárium paramétereire EU-előírások alapján a következőknek kell teljesülnie:

– Az akvárium térfogata 1 m^3 kell, hogy legyen;
– az akvárium alapja olyan téglalap, melynél az oldalak aránya 1 : 2;
– a négy oldalfal olyan üvegből készül, melynek ára 90 euró négyzetméterenként;
– az akvárium alsó lapja pedig olyan üvegből készül, melynek négyzetmétere 120 euróba kerül.

Milyennek válasszuk az akvárium éleit, hogy a lehető legkevesebb legyen az anyagköltség, és az hány euró lesz? (*16 pont*)

9. Hány olyan $0<\frac{a}{b}<1$ és $0<\frac{c}{d}<1$ $(a,b,c,d\in\mathbb{N}^+)$ nem egyszerűsíthető közönséges tört van, hogy az

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{c}{d}\right)$$

szorzat egész, valamint $a+b+c+d=100$? (*16 pont*)

Sztranyák Attila
Budapest

Megoldásvázlatok a 2019/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $\cos 2x = 5\cos x - 3$ *egyenletet, ha* $x\in[-\pi;2\pi]$. (*5 pont*)

b) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$2\sqrt{\frac{x}{5}}-\sqrt{x+2-\sqrt{x+4}}\geqslant 0$$

egyenlőtlenséget. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) $(2\cos^2 x-1)-5\cos x+3=0$; $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$;

$$(\cos x)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}.$$

$(\cos x)_1=2$ nem lehetséges; $(\cos x)_2=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Az egyenletnek ezek közül három megoldása van az adott halmazon: $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

b) Kikötések: $x \geqslant 0$; $x+4 \geqslant 0$; $x+2-\sqrt{x+4} \geqslant 0$. Ha az első teljesül, akkor a második is. Ezek teljesülését feltéve alakítsuk a harmadikat: $x+2 \geqslant \sqrt{x+4}$; mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens művelet, ezért

$$x^2+4x+4 \geqslant x+4;$$

$$x^2+3x \geqslant 0;$$

ebből $x \leqslant -3$ vagy $0 \leqslant x$ adódik. Ezt egybevetve a korábbiakkal végül $x \geqslant 0$ a feltétel.

Rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$2\sqrt{\frac{x}{5}} \geqslant \sqrt{x+2-\sqrt{x+4}}.$$

Most is négyzetre emelhetünk,

$$4 \cdot \frac{x}{5} \geqslant x+2-\sqrt{x+4};$$

$$\sqrt{x+4} \geqslant \frac{x}{5}+2;$$

$$x+4 \geqslant \frac{x^2}{25}+\frac{4}{5}x+4;$$

$$0 \geqslant \frac{x^2}{25}-\frac{x}{5};$$

$$0 \geqslant x^2-5x;$$

ebből $0 \leqslant x \leqslant 5$ következik, ami a kikötéseknek is megfelel. Tehát a megoldás: $x \in [0;5]$.

2. *Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ sorozatot korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából. Megállapításainkat igazoljuk.* (*11 pont*)

Megoldás. A sorozat korlátos, mert alulról pl. a -1, felülről a 2 korlátja. $\frac{2n-3}{n+1} > -1$; $n+1>0$, tehát $2n-3 > -(n+1)$; $3n>2$, ami igaz, ide ekvivalens lépéseken keresztül jutottunk, ezért a kiinduló állítás is igaz.

$$\frac{2n-3}{n+1} < 2; \quad 2n-3 < 2n+2; \quad -3 < 2$$

(indoklás ugyanaz, mint az előbb).

A sorozat szigorúan monoton növő, azaz $a_n < a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén.

$$\frac{2n-3}{n+1} < \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1};$$

$$(2n-3)(n+2) < (2n-1)(n+1);$$

$$2n^2+n-6<2n^2+n-1;$$
$$-6<-1$$

(ismét egy mindig igaz állítást kaptunk, ...).

A sorozat konvergens, határértéke 2.

$$a_n=\frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, a konvergens sorozatokra vonatkozó tételek szerint a $3\cdot\frac{1}{n}$ sorozat határértéke $3\cdot 0=0$; a számlálóé 2, a nevezőé 1, így a hányadosé 2 lesz. Ha az $\varepsilon>0$, n_0-os definíciót használjuk, akkor a megsejtett 2 határértékkel felírhatjuk, hogy

$$\left|2-\frac{2n-3}{n+1}\right|<\varepsilon;\quad \frac{5}{n+1}<\varepsilon;\quad \frac{5}{\varepsilon}-1<n;$$

amiből $\varepsilon\geqslant 5$ esetén $n_0=1$, egyébként $n_0=\left[\frac{5}{\varepsilon}-1\right]$ (a [ ] egészrészt jelent), tehát van minden pozitív ε-hoz küszöbindex.

3. *Egy baráti társaságban* 32 *lapos magyar kártyával játszottak. (Itt a „színek”: piros, zöld, makk, tök; mindegyik színen belül ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas, hetes lapok találhatók.) Egyik este Károly feljegyezte, hogy az első tíz osztás alkalmából hány piros lapot kapott. Az* 1, 3, 0, 2, 4, 2, 5, 3, 2, 4 *adatokat írta fel.*

a) Mennyi az átlag, módusz, medián, szórás? (*4 pont*)

Egyszer a piros lap előfordulásának törvényszerűségeit vizsgálták úgy, hogy a jól megkevert pakliból találomra kihúztak egy lapot, feljegyezték, hogy piros-e vagy sem, majd visszatették a többi közé. Ezt összesen nyolcszor végezték el.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 5*-ször kaptak pirosat?* (*6 pont*)

Később megváltoztatták a húzás módját, ekkor egyszerre vettek ki 8 *lapot a megkevert pakliból.*

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 6 *piros lap van közöttük?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Az átlag 2,6; módusz 2; medián 2,5; szórás 1,43.

b) A piros húzásának esélye: $p=\frac{1}{4}$; nem pirosé: $q=\frac{3}{4}$. Jelölje ξ azt, hogy hányszor lett piros a húzás eredménye. Kevesebb számolással kapjuk a komplementer esemény valószínűségét, így ezt számítjuk ki először (négy tizedesjegyre kerekítünk). $P(\xi=6)=\binom{8}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^2=0{,}0038$, $P(\xi=7)=\binom{8}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\frac{3}{4}=0{,}0004$, $P(\xi=8)=\left(\frac{1}{4}\right)^8=0{,}0000$; ezek összege: 0,0042, tehát az esemény valószínűsége $P(A)=1-0{,}0042=0{,}9958$.

c) $$P(B)=\frac{\binom{8}{6}\binom{24}{2}}{\binom{32}{8}}+\frac{\binom{8}{7}\binom{24}{1}}{\binom{32}{8}}+\frac{\binom{8}{8}\binom{24}{0}}{\binom{32}{8}}=\frac{7921}{10\,518\,300}=0{,}0008.$$

4. *a*) *Van-e olyan másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám?* (*3 pont*)

b) *Van-e olyan egész együtthatós másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám?* (*6 pont*)

c) *Van-e olyan egyszerű gráf, amelynek* 8 *pontja és* 29 *éle van?* (*3 pont*)

Ha az előbbi kérdésekre igen a válasz, adjunk példát ilyen esetre, ha nem, indokoljuk a választ.

d) *Mutassuk meg, hogy az* A, B *kijelentések tetszőleges logikai értéke esetén* $A \vee (A \wedge B) = A$. (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Igen, pl. $(x-1)\big(x-\sqrt{2}\,\big)=0$; felbontva, rendezve:

$$x^2-\big(1+\sqrt{2}\,\big)x+\sqrt{2}=0;$$

vagy pl. $x(x-\pi)=0$; $x^2-\pi x=0$ stb.

b) Nincs ilyen egyenlet. Először belátjuk, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális szám. Tegyük fel, hogy $q_1+q^*=q_2$; $q^*=q_2-q_1$; ez azonban ellentmondás, mert a racionális számok halmaza a négy alapműveletre nézve zárt halmaz, azaz két racionális szám különbsége is racionális. Az általános másodfokú egyenlet együtthatói és gyökei közötti egyik összefüggés szerint $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. Tegyük fel, hogy az egyik gyök racionális, a másik irracionális, ekkor a bal oldal irracionális, a jobb oldal racionális, ami lehetetlen.

c) Nincs ilyen gráf. Ha a gráf egyszerű teljes gráf volna, akkor $\binom{8}{2}=28$ éle lenne. Mivel 29 éle van, legalább egy hurokélnek kell lennie, ekkor viszont nem egyszerű a gráf.

d) Készítsük el az igazság táblázatot:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
i	i	i	i
i	h	h	i
h	i	h	h
h	h	h	h

Láthatjuk, hogy az első és utolsó oszlop rendre egyezik, ezzel az állítást igazoltuk.

II. rész

5. *Nyári vitorlástábor* 26 *fiataljának úszásoktatást szerveztek fizikai erőnlétük javítása, vízi biztonságuk erősítése céljából. A táborban gyors-, mell- és hátúszás oktatására volt szakképzett oktató, így a résztvevők e három úszásnemre jelentkezhettek. Mindenkinek legalább egyet választania kellett.* 17*-en választották a gyorsúszást,* 15*-en jelentkeztek hátúszásra,* 16*-an pedig mellúszásra.* 8 *olyan, gyorsúszást választott fiatal van, aki hátúszásra nem jelentkezett. Azok közül, akik a gyorsot választották,* 8*-an mellre is jelentkeztek. Csupán ketten választották mindhárom úszásnemet.*

a) Hány résztvevő választotta a mell- és hátúszást is? (*7 pont*)

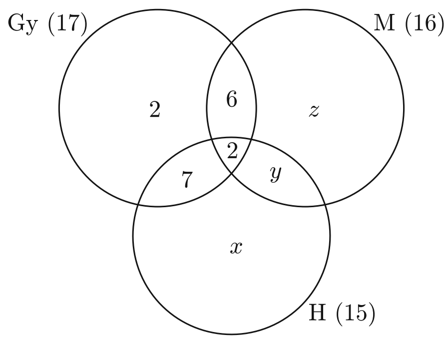
Az oktatás végén a balatonboglári uszodában versenyt rendeztek a táborlakók számára. A leány mellúszás döntőjébe Anna, Bea, Cecília, Dóra, Edit és Flóra került.

b) Hányféleképpen végződhetett a döntő, ha tudjuk, Dóra nem lett dobogós (nem volt az első háromban), de nem is lett utolsó, továbbá Bea megelőzte Flórát, azonban kikapott Edittől? Holtverseny nem volt. (*6 pont*)

A táborzáró estén díjak, jutalmak átadására került sor. A szponzorok három értékes tárgyat sorsolással kívántak kiosztani, ezért a táborozók nevét felírták egy-egy cédulára és ezeket egy urnába dobták, majd a főszponzor kihúzott három cédulát.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom nyertes csak egy úszásnem oktatásán vett részt? (*3 pont*)

Megoldás. *a*) A leírásban szereplő adatok alapján elkészíthetjük a mellékelt *ábrát,* ahol az ismeretlen részhalmazok elemeinek számát x, y, z jelöli. Felírhatjuk az alábbi egyenleteket:



$$\left.\begin{aligned} x+y&=6\\ y+z&=8\\ (x+y)+z&=9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ 6+z=9\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=3,\ y=5,\ x=1.$$

Tehát a mell- és hátúszást is 7 résztvevő választotta.

b) Dóra 4., vagy 5. lett. Tegyük fel, hogy Dóra negyedik helyezett lett. Edit, Bea és Flóra egymáshoz képest ilyen sorrendben következtek, tehát ha kiválasztjuk a maradék öt helyezésből azt a hármat, amelyikre őket tesszük, akkor a fennmaradó két helyen Anna és Cecília osztozik. A három hely kiválasztása $\binom{5}{3}=10$-féleképpen lehetséges, Anna és Cecília kétféleképpen helyezkedhetnek el, így ebben az esetben 20 lehetőség adódik. Ugyanez a helyzet akkor is, ha Dóra ötödik lett. Tehát a döntő 40-féleképpen végződhetett.

c) Összesen 6 olyan fiatal volt, aki csak egy úszásnem oktatásán vett részt, közülük $\binom{6}{3}=20$-féleképpen választhatjuk ki a három nyertest (sorrend nem számít, hiszen nem ismétlődhetnek), míg az összes lehetőség $\binom{26}{3}=2600$, tehát

$$P(A)=\frac{20}{2600}=\frac{1}{130}=0{,}0077.$$

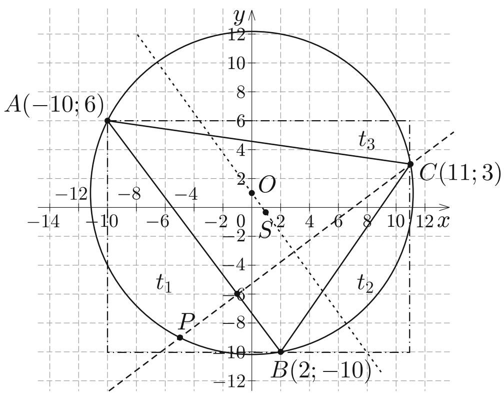
6. *Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái:* $A(-10;6)$, $B(2;-10)$, $C(11;3)$.

a) Írjuk fel a háromszög körülírt körének egyenletét. (*4 pont*) *b) Jelölje O a körülírt kör középpontját, S a súlypontot. Írjuk fel az OS egyenes egyenletét. Milyen helyzetű az OS egyenes az AB egyeneshez viszonyítva? Igazoljuk észrevételünket.* *(4 pont)*

c) Hol van a C-n átmenő magasságvonal és a körülírt kör C-től különböző metszéspontja? *(4 pont)*

d) Mekkora a háromszög területe? *(4 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* A kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=R^2$, ahol $O(u;v)$ a kör középpontja, R a sugara.



$$
\begin{aligned}
&A: && (-10-u)^2+(6-v)^2=R^2,\\
&B: && (2-u)^2+(-10-v)^2=R^2,\\
&C: && (11-u)^2+(3-v)^2=R^2; \quad \text{felbontva}\\
&A: && u^2+v^2+20u-12v+136=R^2,\\
&B: && u^2+v^2-4u+20v+104=R^2,\\
&C: && u^2+v^2-22u-6v+130=R^2,\\
&A-B: && 24u-32v+32=0 \ \Rightarrow\ 3u=4v-4,\\
&C-B: && -18u-26v+26=0,\\
& && -6(4v-4)-26v+26=0,\\
& && -24v+24-26v+26=0; \quad 50v=50;
\end{aligned}
$$

$v=1$; $3u=4-4$; $u=0$; $O(0;1)$; $R^2=125$.

A körülírt kör egyenlete : $x^2+(y-1)^2=125$.

II. megoldás. Az oldalak felezőmerőlegeseit felírva (bármelyik kettőt), a belőlük alkotott egyenletrendszer megoldása a körülírt kör középpontjának koordinátáit eredményezi. Ezt bármelyik csúccsal összekötve, a kapott szakasz hossza adja a kör sugarát. Az a oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $9x+13y=13$; a b oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $7x-y=-1$; a c oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $3x-4y=-4$. $O(0;1)$, $R=5\sqrt{5}$.

b) A háromszög súlypontja

$$S\left(\frac{-10+2+11}{3};\frac{6-10+3}{3}\right);\quad S\left(1;-\frac{1}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{OS}\left(1-0;-\frac{1}{3}-1\right);\quad \overrightarrow{OS}\left(1;-\frac{4}{3}\right).$$

Használjuk irányvektornak az $\overrightarrow{OS}$-sel párhuzamos $\mathbf{v}(3;-4)$ vektort, pontnak O-t, így az OS egyenes egyenlete:

$$v_2x-v_1y=v_2x_0-v_1y_0;\quad -4x-3y=0-3;\quad 4x+3y=3.$$

Az OS egyenes (Euler-egyenes) párhuzamos AB-vel, mert $\overrightarrow{AB}(12;-16)$ párhuzamos $\overrightarrow{OS}$-sel.

c) A C-n átmenő magasságvonal merőleges AB-re, így a $\mathbf{v}(3;-4)$ vektor a magasságvonal normálvektora lesz. A magasságvonal egyenlete:

$$n_1x+n_2y=n_1x_0+n_2y_0;$$
$$3x-4y=33-12.$$

Innen $y=\frac{3}{4}x-\frac{21}{4}$, ezt beírva a körülírt kör egyenletébe:

$$x^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{21}{4}-1\right)^2=125.$$

Összevonás, négyzetre emelés után az

$$x^2+\frac{9}{16}x^2-\frac{150}{16}x+\frac{625}{16}=125$$

egyenletet kapjuk. 16-tal szorozva, 25-tel osztva az $x^2-6x-55=0$ egyenlethez jutunk. Ebből

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+220}}{2}=\frac{6\pm16}{2},$$

$x_1=11$, ez a C pont abszcisszája, $x_2=-5$; $y_2=\frac{3}{4}(-5)-\frac{21}{4}=-9$; tehát $P(-5;-9)$.

d) A területet a legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, hogy téglalapba foglaljuk a háromszöget és levágjuk a felesleget. A téglalap vízszintes oldala 21 egység, a függőleges 16 egység, így területe 336 területegység.

$$t_1=\frac{16\cdot12}{2}=96;\quad t_2=\frac{9\cdot13}{2}=58{,}5;\quad t_3=\frac{21\cdot3}{2}=31{,}5;$$

tehát a háromszög területe: $T=336-(96+58{,}5+31{,}5)=150$ területegység.

További megoldások is vannak, nézzünk vázlatosan néhányat.

I. Meghatározzuk AB egyenletét, ez: $4x+3y=-22$, összekapcsolva a C-n átmenő magasságvonal $3x-4y=21$ egyenletével, a megoldás a magasság talppontjának koordinátáit eredményezi: $T(-1;-6)$. Az AB hossza 20, a TC hossza 15 egység, innen a terület 150 területegység.

II. Koszinusz tétellel kiszámítjuk az A csúcsnál levő szöget, erre 45° adódik, alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet:

$$T=\frac{20\cdot 15\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=150.$$

III. Használjuk a Heron-képletet. Sok számolással jár, ugyanezt az eredményt adja.

7. *Egy mértani sorozat első négy tagjából rendre* 1*-et,* 2*-t,* 5*-öt,* 11*-et elvéve egy számtani sorozat négy szomszédos tagját kapjuk.*

a) Mennyi a mértani sorozat első tagja és hányadosa? (*8 pont*)

Számítsuk ki az adott eljárással a számtani sorozat elemeit, majd képzeletben folytassuk mindkét irányba a sorozatot.

b) Van-e ebben a számsorban olyan szomszédos elemekből álló rész, amelyben az elemek összege 2019*? Ha igen, adjuk meg az összes megoldást. Indokoljuk a választ.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) A mértani sorozat első négy tagja: a, aq, aq^2, aq^3. Az alakítás utáni számtani sorozat elemei: $a-1$; $aq-2$; aq^2-5; aq^3-11. Tudjuk, hogy a számtani sorozat n-edik elemére $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ $(n\geqslant 2)$ teljesül, ezért felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$2(aq-2)=(a-1)+(aq^2-5)\quad\Rightarrow 0=aq^2-2aq+a-2\quad\Rightarrow 2=a(q-1)^2,$$

$$2(aq^2-5)=(aq-2)+(aq^3-11)\ \Rightarrow 0=aq^3-2aq^2+aq-3\ \Rightarrow 3=aq(q-1)^2.$$

Ez utóbbiban az $a(q-1)^2$-t 2-vel helyettesítve $3=2q$-t kapunk, amiből $q=\frac{3}{2}$, ezt felhasználva $2=a\left(\frac{3}{2}-1\right)^2$, ebből $a=8$.

A mértani sorozat első tagja 8, hányadosa $\frac{3}{2}$.

Ellenőrzés: a mértani sorozat első négy tagja: 8; 12; 18; 27, ezekből a levonások után 7; 10; 13; 16 lesz, amely számok közötti különbség mindenütt 3, azaz egy számtani sorozat (amely csupa egész számból áll) négy szomszédos eleme.

b) $\ldots,-5,-2,1,4,\mathbf{7},\mathbf{10},\mathbf{13},\mathbf{16},19,22,25,28,\ldots$. Tegyük fel, hogy van ilyen rész, az első tagját jelöljük b-vel, a benne szereplő tagok számát k-val. Ekkor

$$b+(b+3)+(b+6)+\ldots+\big[b+(k-1)3\big]=2019.$$

Használjuk az összegképletet: $k\frac{b+b+(k-1)3}{2}=2019$; $k\left(b+\frac{k-1}{2}3\right)=2019$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$.

Mivel $2019 = 3 \cdot 673$, ezért k lehetséges értéke 1, 3, 673, 2019, az ezekhez tartozó második tényező rendre 2019, 673, 3, 1.

$$k = 1, \qquad b + \frac{1-1}{2} \cdot 3 = 2019 \quad \Rightarrow \quad b = 2019,$$

$$k = 3, \qquad b + \frac{3-1}{2} \cdot 3 = 673 \quad \Rightarrow \quad b = 670,$$

$$k = 673, \qquad b + \frac{673-1}{2} \cdot 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad b = -1005,$$

$$k = 2019, \qquad b + \frac{2019-1}{2} \cdot 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -3026.$$

Szerepelnek-e ezek a számok a számsorban?

Ha a 670, illetve 2019 benne volna, akkor a négy számtól – a felsorolás szerint – jobbra lenne, a 7-től az n-edik helyen. $670 = 7 + n \cdot 3 \Rightarrow n = 221$; $2019 = 7 + n \cdot 3 \Rightarrow n = 670{,}\dot{6} \notin \mathbb{Z}^+$.

Azt kaptuk, hogy a 670 tagja a számsornak, a 2019 pedig nem $(670 + 673 + 676 = 2019)$.

Ugyanígy járhatunk el a két másik b-vel, ezek balra vannak, tehát $-1005 = 7 + n(-3) \Rightarrow n = 337{,}\dot{3} \notin \mathbb{Z}^+$; $-3026 = 7 + n(-3) \Rightarrow n = 1011$, azaz a -1005 nincs a számok között, a -3026 viszont igen (7-től balra az 1011. helyen). Ez utóbbi esetben a -3026-tól kezdve 2019 számot véve a számsorból, ezek összege is 2019 lesz:

$$2019 \frac{\big[-3026 + (-3026 + 2018 \cdot 3)\big]}{2} = 2019 \frac{-3026 + 3028}{2} = 2019.$$

Tehát van a számsorban két olyan rész, amelyben a szomszédos tagok összege 2019.

Megjegyzés: a 670, 673, 676 számhármasra viszonylag könnyen rá lehet jönni, mert a 2019 szorzattá bontásakor a $3 \cdot 673$-at kapjuk, tehát csak azt kell megnézni, hogy a 673 benne van-e a számsorban. Ha ugyanis igen, akkor a 3-as differencia miatt a két szomszédja is, és ennek a három számnak az összege 2019. Mint tudjuk, a 673 benne van a számsorban. A másikra a számsor $(\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$ 1 elemének szomszédjait összeadva jöhetünk rá, ugyanis 2-t kapunk eredményül; ha a második szomszédokat adjuk össze, szintén 2 lesz az eredmény, és így tovább. Ilyen módon 1009 párt képezve, majd a végén az 1-et hozzáadva 2019-et kapunk. Könnyen kiszámítható, hogy a legtávolabbi pár bal vége -3026, a jobb vége pedig 3028. Ezek után természetesen igazolni kellene, hogy további megoldások nincsenek.

8. *Egységsugarú körből megfelelő körcikket kivágva, majd egyenes körkúp palástjának kialakítva tölcsért készítünk.*

a) Mekkora a körcikk középponti szöge, ha a tölcsér térfogata a lehető legnagyobb? (*9 pont*)

Rendelkezésre áll egy 10×16 *egység oldalú téglalap alakú lemez, amelyből az a) részben kapott maximális térfogatú tölcséreket szeretnénk kialakítani.*

b) Tudunk-e ebből a lemezből 50 *db ilyen tölcsért csinálni? Megállapításunkat indokoljuk.* (*7 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* Legyen a kúp félnyílásszöge α, ekkor az alapkör sugara $r=\sin\alpha$, magassága $m=\cos\alpha$, térfogata $V=\frac{\pi\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{3}$,

$$V'(\alpha)=\frac{\pi}{3}\left[2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha(-\sin\alpha)\right]=\frac{\pi}{3}\left[2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha\right]=$$

$$=\frac{\pi}{3}(2\sin\alpha-3\sin^3\alpha).$$

Ahol az első derivált 0, ott lehet szélsőértéke a függvénynek:

$$0=\sin\alpha(2-3\sin^2\alpha).$$

I. eset. $\sin\alpha=0 \ \Rightarrow\ \alpha=0$, ez nem lehet maximumhely.

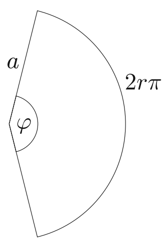
II. eset.

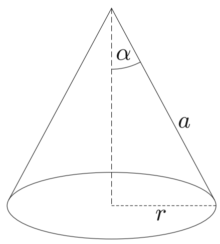
$$0=2-3\sin^2\alpha \ \Rightarrow\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}} \ \Rightarrow\ \alpha=54{,}74^\circ \ (0<\alpha<90^\circ),$$

$$V''(\alpha)=\frac{\pi}{3}(2\cos\alpha-9\sin^2\alpha\cos\alpha)=\frac{\pi}{3}\cos\alpha\left(2-9\frac{2}{3}\right)<0,$$

itt tehát valóban maximuma van a térfogatnak. Ekkor a körcikk középponti szöge (φ): $\varphi\cdot 1=2r\pi$; $\varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 5{,}13$.

A legnagyobb térfogatú tölcsérhez tartozó körcikk középponti szöge 293,93°.





II. megoldás. Az egyenes körkúp félnyílásszöge és kiterített palástjának középponti szöge között összefüggés van. Egyrészt $\varphi\cdot a=$ $=2r\pi$, másrészt

$$\sin\alpha=\frac{r}{a} \ \Rightarrow \varphi a=2\pi a\sin\alpha \ \Rightarrow\ \varphi=2\pi\sin\alpha,$$

innen

$$\sin\alpha=\frac{\varphi}{2\pi},\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}.$$

A térfogatfüggvény:

$$V(\varphi)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}=\frac{\pi}{3}\,\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\,\frac{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}{2\pi}=\frac{1}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2\varphi^4-\varphi^6}=$$

$$=\frac{1}{24\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{8\pi^2\varphi^4-2\varphi^6}.$$

Mivel a négyzetgyök függvény szigorúan monoton nő, ezért elég meghatározni a gyökjel alatti mennyiség maximumát. Ezt megoldhatjuk elemi úton is:

$$\varphi^2\varphi^2(8\pi^2-2\varphi^2)=8\pi^2\varphi^4-2\varphi^6,$$

a számtani-mértani közép közötti összefüggést használva kapjuk, hogy

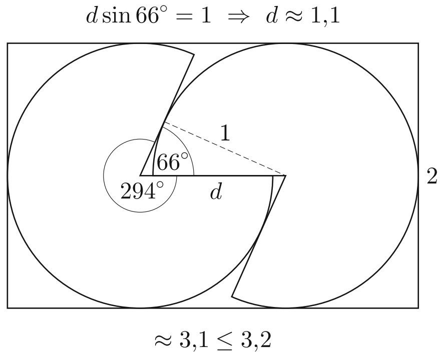
$$\frac{\varphi^2+\varphi^2+(8\pi^2-2\varphi^2)}{3} \geqslant \sqrt[3]{\varphi^2\varphi^2(8\pi^2-2\varphi^2)}; \quad \frac{8\pi^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{\varphi^2\varphi^2(8\pi^2-2\varphi^2)}.$$

A bal oldal állandó, a jobb oldali mennyiség akkor lesz a legnagyobb, ha az egyenlőség teljesül, ez pedig csak a tényezők egyenlősége esetén valósul meg (a köbgyök függvény is szigorúan monoton növekvő).

$$8\pi^2-2\varphi^2=\varphi^2 \;\Rightarrow\; 8\pi^2=3\varphi^2 \;\Rightarrow\; \varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},$$

ami 293,93°-nak felel meg.

b) Az hamar belátható, hogy egységsugarú körökből nem lehet kivágni 50 dbot az adott méretű lemezből. (Ellenőrizhető, hogy legfeljebb 41 kör fér el a 10 × 16-os téglalapon.) Azonban két – a legnagyobb térfogatot eredményező – körcikk befoglalható egy 2 × 3,2 egység oldalú téglalapba az *ábrának* megfelelően.



16 : 3,2 = 5, 10 : 2 = 5, ezért a lemezből kivágható 25 db ilyen kis téglalap, mindegyikben 2 körcikkel, tehát tudunk 50 db tölcsért készíteni.

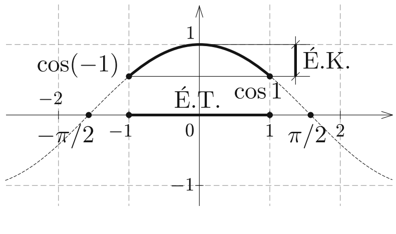
9. *Adott az $f(x)=\cos x$ és a $g(x)=\sin 2x$ függvény ($x\in\mathbb{R}$).*

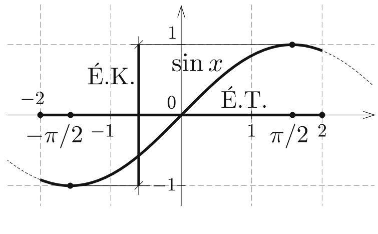
a) *Írjuk fel a $h(x)=f\circ g$, illetve $k(x)=g\circ f$ függvényeket, állapítsuk meg az értékkészletüket.* *(6 pont)*

b) *Hol metszi egymást az $f(x)$ és $g(x)$ függvény grafikonja? Adjuk meg a metszéspontok koordinátáit.* *(5 pont)*

c) *Mekkora e két görbe által közrefogott síkidom területe, ha $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?* *(5 pont)*

Megoldás. *a*) $h(x)=f\circ g=\cos(\sin 2x)$; $k(x)=g\circ f=\sin(2\cos x)$. Mindkét esetben a belső függvény értékkészlete lesz a külső függvény értelmezési tartománya.





$h(x)$ esetén: $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$; $\cos(-1) = \cos 1$, ezért $\cos 1 \leqslant h(x) \leqslant 1$, más jelöléssel $h(x) \in [\cos 1; 1]$.

$k(x)$ esetén: $-2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2$, ennek részhalmaza $a\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ahol a $\sin x$ -1-től $+1$-ig minden valós értéket felvesz, így $-1 \leqslant k(x) \leqslant 1$, vagy $k(x) \in [-1; 1]$.

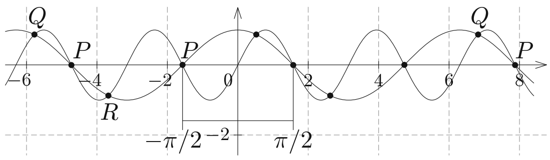
b) A metszéspontok abszcisszája a $\cos x = \sin 2x$ egyenlet megoldása.

$$\cos x = 2\sin x \cdot \cos x; \quad 0 = \cos x(2\sin x - 1); \quad \cos x = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = \frac{\pi}{2} + p\pi, \ p \in \mathbb{Z};$$

vagy $2\sin x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \sin x = \frac{1}{2}$. Innen $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$, illetve $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$. Ezekhez tartozó ordináták rendre: $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A metszéspontok tehát:

$$P\left(\frac{\pi}{2} + p\pi; 0\right), \quad Q\left(\frac{\pi}{6} + 2q\pi; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad R\left(\frac{5\pi}{6} + 2r\pi; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ p, q, r \in \mathbb{Z}.$$



A trigonometrikus egyenlet *II. megoldása:* $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (pótszögek közötti összefüggés) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 2x$,

1. eset: $\frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi$, innen $x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. eset: $\frac{\pi}{2} - x + 2x = \pi + 2l\pi$, innen $x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

Meggyőződhetünk, hogy ezek az előbbi megoldással azonosak.

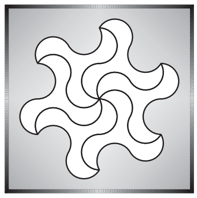
c) A területszámítást két részre bontjuk:

$$t_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos x - \sin 2x\big)\,\mathrm{d}x = \left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(-1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4};$$

$$t_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos 2x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - 1 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$t = t_1 + t_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$. A bezárt síkidom területe $\frac{5}{2}$.

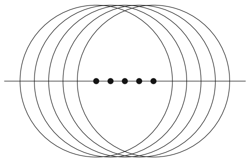
Németh László
Fonyód



Matematika feladat megoldása

B. 5022. *Adott a síkon néhány egységsugarú kör, mindegyik középpontját kékre színezzük. A körvonalakon megjelölünk néhány pontot pirossal úgy, hogy minden körvonalra pontosan* 2 *piros pont illeszkedjen. Legfeljebb mekkora a kék pontok száma, ha összesen* 25 *színezett pont van?*

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)



Megoldás. Egy egységsugarú kört toljunk el ugyanabban az irányban négyszer, 0,0002 távolságra. Az így kapott öt darab egységkör középpontjai egy 0,0008 hosszúságú szakaszon helyezkednek el; ezért közülük bármely kettőnek két közös pontja van, és semelyik háromnak nincs közös pontja. Az utóbbi tulajdonság igazolásához tegyük fel, hogy valamelyik három körnek Q közös pontja. A Q középpontú, egységnyi sugarú körvonalon ekkor mindhárom kör középpontja rajta lenne, ami lehetetlen, hiszen az öt kör középpontjai kollineárisak.

Színezzük ezután az öt középpontot pirosra, a metszéspontokat pedig kékre. Bármelyik két körhöz két kék (metszés)pont tartozik, amelyek a két kört egyértelműen meghatározzák, így a kék pontok száma $2\cdot\binom{5}{2}=20$. A feladat feltételeit így kielégíti az a 20 darab egységsugarú kör, amelyek középpontjai a kék pontok. Tehát a kék pontok száma lehet 20.

Megmutatjuk, hogy 20-nál több viszont nem lehet. Több, mint 20 kék ponttal ugyanis legfeljebb 4 piros pont lehetne. Ekkor viszont csak az lehet kék pont, ami a piros pontok köré rajzolt egység sugarú körök metszéspontjában van, hiszen különben nem lehetne legalább két pirostól egységnyi távolságra. Azonban a négy körnek legfeljebb $2\cdot\binom{4}{2}=12$ metszéspontja lehet (bármely kettőnek legfeljebb kettő). Tehát legfeljebb 4 piros pontnál legfeljebb 12 kék pont lehet, ami nyilván ellentmondás.

Ezzel készen vagyunk: beláttuk, hogy 20 kék pontnál több nem lehet, és mutattunk példát 20-ra.

Hegedűs Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

66 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 18 versenyző: Bencsik Ádám, Fraknói Ádám, Füredi Erik Benjámin, Győrffi Ádám György, Hegedűs Dániel, Jánosik Máté, Kovács Tamás, Nádor Benedek, Nagy Nándor, Németh Norbert Marcell, Nguyen Bich Diep, Nyitrai Boglárka, Soós Máté, Terjék András József, Tiderenczl Dániel, Tóth Balázs, Tóth Ábel, Zsigri Bálint. 2 pontos 20, 1 pontos 7, 0 pontos 21 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (634–638.)

K. 634. Egy négyzetrácsos papíron egységoldalú négyzetek vannak. Rácsvonalak mentén kijelölünk egy téglalapot. Szeretnénk egy olyan zárt töröttvonalat rajzolni a téglalapba a rácsvonalakon haladva, hogy az a téglalapból ne lépjen ki, de az összes olyan rácsponton pontosan egyszer menjen át, amely a téglalap belsejébe vagy a határára esik. Meg tudjuk-e rajzolni a kívánt töröttvonalat, ha a téglalap mérete:

a) 2019×2020 egység;

b) 2018×2020 egység?

Adjuk meg a lehetséges töröttvonalak hosszát is.

K. 635. Vegyünk egy konkáv négyszöget, és rajzoljuk meg a négyszög belsejében haladó átlóját. Az átló két háromszögre vágja a négyszöget. Igazoljuk, hogy pontosan akkor egyenlő a két háromszög területe, ha ezen átló egyenese felezi a másik átlót.

K. 636. Adjuk meg az összes olyan x, y számjegyet, melyre az $\overline{xyxyxyxy}$ alakú tízes számrendszerbeli nyolcjegyű szám prímtényezős felbontásának leírásakor minden leírt, 0-tól különböző számjegy ugyanannyiszor szerepel. (A prímtényezős felbontás leírásakor az azonos prímtényezőket nem vonjuk össze hatvánnyá, hanem teljes szorzatként írjuk ki.)

K. 637. Az 12345678901234567890…1234567890 számból, amely 2020 számjegyből áll, kihúzzuk a páratlan helyen álló számjegyeket. A megmaradó 1010 számjegyből kihúzzuk a páros helyen álló számjegyeket, majd a kapott 505 számjegyből ismét a páratlan helyen álló számjegyeket, és így váltogatva addig folytatjuk, amíg csak 1 számjegy marad. Melyik számjegyet húzzuk ki utoljára?

K. 638. Fibonacci-szerű sorozatoknak nevezzük azokat a sorozatokat, melyekben a harmadik tagtól kezdve minden tag az őt közvetlenül megelőző két tag összege. Fibonacci-szerű sorozat pl. az 1, 1-gyel kezdődő $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ sorozat (ezt nevezik Fibonacci-sorozatnak), de pl. az 1, 3-mal kezdődő $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$ sorozat is. Keressük meg azt a csupa pozitív egész számból álló Fibonacci-szerű sorozatot, melynek tagja a 2010, és a 2010 előtt a lehető legtöbb tagot tartalmazza.

❄

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1567–1573.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1567. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számpárok halmazán:

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0.$$

Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

C. 1568. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja D, AC oldalának felezőpontja E, a DEB és DEC háromszögek körülírható köreinek középpontjai pedig rendre P és Q (tegyük fel, hogy $P \neq Q$). Bizonyítsuk be, hogy a PQ egyenes merőleges BC-re.

Javasolta: *Hegedűs Dániel* (Gyöngyös)

Feladatok mindenkinek

C. 1569. Egy 24 fős osztályban páratlan sok gyereket hívnak Zsófiának. Tudjuk, hogy közülük aki a névsorban legelöl van, az annyiadik a névsorban, ahány Zsófia van, aki pedig a harmadik, annak a sorszáma háromszor ennyi. Tudjuk továbbá, hogy a névsorban minden Zsófia előtt vagy után szintén Zsófia van. Határozzuk meg, hogy az osztálynévsor hányadik helyein szerepelnek Zsófiák.

Hommer László (Kemence) feladata nyomán

C. 1570. Egy hatszög minden szöge 120°, szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak. Igazoljuk, hogy a hatszög forgásszimmetrikus.

Javasolta: *Fried Katalin* (Budapest)

C. 1571. Egy $n \times n$-es táblázatba egymást követően beírjuk 1-től n^2-ig a pozitív egész számokat: az első sorba 1-től n-ig; a második sorba $(n+1)$-től $2n$-ig; és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy az egyik átlóban szereplő számok összege ugyanakkora, mint a másik átlóban.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1572. Az $ABCD$ trapézban jelöljük az AC és BD átlók metszéspontját M-mel, az ABC, illetve az ACD háromszögek körülírt köreinek középpontjait rendre N-nel, illetve P-vel. Bizonyítsuk be, hogy M, N és P pontosan akkor esik egy egyenesre, ha $ABCD$ paralelogramma vagy húrtrapéz.

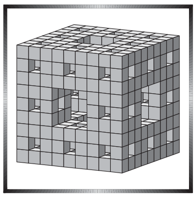
C. 1573. Mutassuk meg, hogy a

$$12^{2n}+7^{2n-1}+3^{3n}+4^{4n-2}-2^{2n}-11^{2n}$$

összeg osztható 23-mal minden pozitív egész n szám esetén.

Javasolta: *Imre Tamás* (Marosvásárhely)

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5054–5061.)

B. 5054. Vannak-e olyan n és k pozitív egész számok, amelyekre

$$20^k+19^k=2019^n-10^n?$$

(*4 pont*) Javasolta: *Imre Tamás* (Marosvásárhely)

B. 5055. Adott a síkon a k kör. Mi azon háromszögek magasságpontjainak mértani helye, amelyeknek k a körülírt köre?

(*3 pont*)

B. 5056. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^2+bx+c$ másodfokú függvényt. Tudjuk, hogy f zérushelyei a p és q különböző prímszámok, továbbá $f(p-q)=6pq$. Határozzuk meg a p és q prímszámokat, valamint írjuk fel az f függvényt.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5057. Az AB átfogójú derékszögű háromszög BC befogóján vegyük fel a D és E pontokat úgy, hogy $DAC\sphericalangle=EAD\sphericalangle=BAE\sphericalangle$. A C csúcsból az AD szakaszra, a D pontból az AB átfogóra bocsátott merőleges talppontjai rendre F és K. Az AE szakaszt a CK egyenes a H pontban, a H ponton keresztül az AD-vel húzott párhuzamos a BC szakaszt az M pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a CHM háromszög körülírt körének középpontja az F pont.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5058. Az ABC háromszög belsejében vegyünk fel egy tetszőleges P pontot. Az AP, BP és CP egyenesek a BC, AC, illetve AB oldalakat rendre A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik. Igazoljuk, hogy

$$\frac{AP}{A_1P}\cdot\frac{BP}{B_1P}\cdot\frac{CP}{C_1P}\geqslant 8.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5059. Legyen valamely pozitív egész c-re $\{a_n\}$ a következő, rekurzív módon definiált sorozat: $a_0 = c$ és $a_{n+1} = \left[a_n + \sqrt{a_n}\right]$, ha $n \geqslant 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha a sorozat tagja a 2019, akkor a korábbi tagok között nincs négyzetszám, de a későbbi tagok között végtelen sok négyzetszám fordul elő.

(*5 pont*)

B. 5060. Adott a Σ síkon egy k körvonal, és a belsejében egy P pont, amely nem esik egybe k középpontjával. Nevezzük a tér egy Σ-ra nem illeszkedő O pontját *jó vetítő középpontnak,* ha létezik olyan, O-ra nem illeszkedő Σ' sík, hogy a Σ pontjait O-ból Σ'-re vetítve a k kör vetülete szintén körvonal, és ennek a körvonalnak a középpontja P vetülete. Mutassuk meg, hogy a jó vetítő középpontok egy körön vannak.

B. 5061. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt nevezzünk *területtartónak,* ha tetszőleges $a < b < c$ és x esetén az $\big(a; f(a)\big)$, $\big(b; f(b)\big)$ és $\big(c; f(c)\big)$ pontok által meghatározott háromszög területe megegyezik az

$$\big(a + x; f(a + x)\big), \quad \big(b + x; f(b + x)\big) \quad \text{és} \quad \big(c + x; f(c + x)\big)$$

pontok által meghatározott háromszög területével.

Mely folytonos f függvények területtartóak?

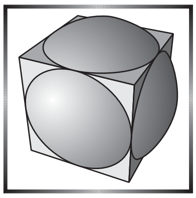
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (761–763.)



A. 761. Legyen $n \geqslant 3$ pozitív egész szám. Pozitív egészek egy S halmazát *jónak* nevezzük, ha S elemeinek száma n, S egyik eleme sem osztható n-nel és az S halmaz elemeinek összege sem osztható n-nel. Legyen d az a legkisebb pozitív egész szám, melyre létezik olyan jó S halmaz, melynek pontosan d darab nemüres részhalmazában osztható n-nel a részhalmaz elemeinek összege. Határozzuk meg d-t (n függvényében).

Javasolta: *Aleksandar Makelov* (Burgas, Bulgaria) és
Nikolai Beluhov (Stara Zagora, Bulgaria)

A. 762. A Négyszögletű Kerek Erdőben n különböző (pontszerű) fa található, semelyik három nem esik egyenesre. Mikkamakka az erdőről fényképeket készít, melyeken az összes fa látható (úgy, hogy a képeken a fák nem lehetnek egymás mögött). Legfeljebb hány különböző sorrendben szerepelhetnek a fák a készített képeken?

Javasolta: *Mészáros Gábor* (Sunnyvale, Kalifornia)

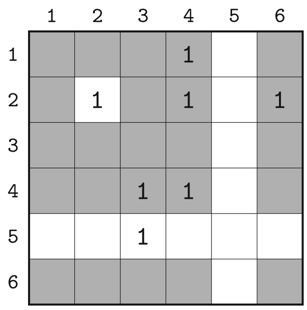
A. 763. Legyen $k \geqslant 2$ egész szám. n darab golyó tömegét szeretnénk kideríteni. Egy mérés során két golyót választhatunk, és elárulják nekünk a két választott golyó tömegének az összegét. Tudjuk, hogy a kapott válaszok között legfeljebb k hibás lehet. Jelölje $f_k(n)$ a legkisebb számot, melyre igaz, hogy $f_k(n)$ méréssel biztosan ki tudjuk találni a golyók tömegét (a méréseket nem kell előre eldönteni). Bizonyítandó, hogy léteznek olyan a_k és b_k számok, melyekre teljesül, hogy $\left|f_k(n) - a_k n\right| \leqslant b_k$.

Javasolta: *Surányi László* (Budapest) és *Virág Bálint* (Toronto)

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 493. Négyzet alakú mezőkből álló játéktereken, például táblás játékoknál vagy szimulációs programokban (lásd mintázatképződés, **I. 256.** feladat) a szomszédság meghatározása lényeges.



Legyen adott egy $N \times N$ $(5 \leqslant N \leqslant 100)$ négyzetből álló játéktábla, amelynek minden mezője vagy üres, vagy egy bábut tartalmaz. A szomszédos mezők oldalaikkal vagy sarkaikkal érintkeznek, illetve a játéktér túlsó szélén vagy átellenes sarkán vannak. Két különböző mező T távolságban $(1 \leqslant T \leqslant N/2)$ szomszédos, ha legföljebb T mezőn keresztül el lehet jutni az egyik mezőről a másikra. Például egy 6×6-os táblán a $(2; 2)$ mező 2 távolságú szomszédjai az *ábrán* szürke színezésűek.

Készítsünk programot `i493` néven, amely egy játéktábla pillanatnyi állása mellett megadja K darab kiválasztott mező T távolságú szomszédságában lévő mezőkön található bábuk számának összegét.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be N, K és T értékét, majd a következő N sorból soronként N darab egész számot: `1` vagy `0` jelöli, hogy az adott mezőn van bábu, vagy nincs. A következő K sorban a vizsgált mezők oszlop- és sor koordinátái szerepelnek. A program a standard kimenet első sorába írja a megadott K mező T távolságú szomszédságában található mezőkön lévő bábuk számának összegét.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
6 2 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 5 2 1 6	6

Beküldendő egy `i493.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető állomány: `i493beki.zip`.

I. 494 (É). Az Országgyűlés ülése akkor határozatképes, ha azon a képviselők több, mint a fele jelen van. Szavazni „igen", „nem" vagy „tartózkodom" nyilatkozattal lehet. Az Országgyűlés az Alaptörvényben, törvényekben vagy a házszabályi rendelkezésekben meghatározott kivételekkel – amely esetekben a szavazás titkosan történik – minden kérdésben nyílt szavazással határoz. A határozathozatal során alapesetben tíz másodperc áll a képviselő rendelkezésére a választott gomb megnyomására.

Feladat a 2019. január és 2019. június során megtartott szavazások adatainak elemzése lesz adatbázis-kezelő program használatával.

1. Készítsünk új adatbázist `orszagszavazas` néven. A letölthető adatállományokat importáljuk az adatbázisba a fájlnévvel azonos nevű táblákba. Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő típusokat és kulcsokat. Az állományok tabulátorral tagolt, közép-európai (Windows) kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.
2. Ha a feladat megoldásához szükségünk van rá, alakítsunk ki megfelelő kapcsolatokat a táblák között.

Táblák:

elnok (elnokazon, nev, part)

elnokazon	az elnök azonosító száma (szám), kulcs;
nev	az elnök neve (szöveg);
part	az elnök pártja (szám).

szavazas (ugyazon, igen, nem, tartozkodott, elnokazon, szavazdatum, szavazido)

ugyazon	az adott ügy azonosítója (szám), kulcs;
igen	az igen szavazatok száma (szám);
nem	a nem szavazatok száma (szám);
tartozkodott	a tartózkodások száma (szám);
elnokazon	az elnök azonosító száma (szám);
szavazdatum	a szavazás dátuma (dátum);
szavazido	a szavazás ideje (dátum).

ugy (ugyazon, iromany, cim, benyujto, eredmeny)

ugyazon	az adott ügy azonosítója (szám), kulcs;
iromany	az adott ügy jelzése (szöveg);
cim	az adott ügy címe (szöveg);
benyujto	az adott ügyet benyújtó személy vagy terület (szöveg);
eredmeny	az adott szavazás eredménye (szöveg).

Készítsük el a következő feladatok megoldását. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok ne. Megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

3. Adjuk meg, hogy hány esetben volt határozatképtelen az országgyűlés. (3hatarozatkeptelen)
4. Adjuk meg, hogy átlagosan hány órakor történtek a szavazások. Eredményünket egész órában jelenítsük meg. (4nepszeruido)
5. Vizsgáljuk meg és írjuk ki annak az elnöknek a nevét és az elnöklete alatt tartott szavazások számát, aki a legtöbb szavazáson elnökölt. (5legtobb)
6. A jelenlegi *szavazas* táblánkat egészítsük ki egy új *osszes* oszloppal, ahol megadjuk, hányan szavaztak összesen az adott kérdésben. (6osszes)
7. Írassuk ki azon dátumokat, amikor az összes szavazatszám nem érte el a 100-at, bármely aznapi szavazás esetében. (7kevesebb)
8. Írassuk ki azokat az ügycímeket (mindegyik csak egyszer jelenjen meg), amelyek irományszáma S jelzéssel van ellátva. (8iromany)
9. Adjuk meg, hogy melyik az a párt, amelynek a legtöbb indítványát vetették el és összesen hányat. (9elvetett)
10. Készítsünk jelentést, ahol megjelenítjük, hogy melyik elnök mely napokon elnökölt. A jelentés legyen elnökönként dátum szerint növekvő sorrendben rendezve. (10elnokok)

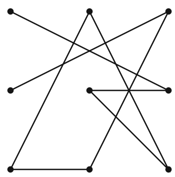
Beküldendő egy tömörített `494.zip` állományban az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve és verziószáma.

Forrás:
`https://www.parlament.hu/web/guest/bevezetes5` (utolsó letöltés 2019.09.17.);
`https://www.parlament.hu/web/guest/szavazasok-adott-idoszakban` (utolsó letöltés 2019.09.17.).

Letölthető állomány: `adatok.zip`

I. 495. A lezárt mobiltelefonra történő egyik bejelentkezési lehetőség a feloldóminta rajzolása. Ekkor 3×3 pont között kell egymáshoz csatlakozó szakaszok behúzásával egy ábrát létrehoznunk. Tamás feloldómintája egy töröttvonal, amely mindegyik ponton egyszer halad át. András szerint ez a minta nem biztonságos, jobb lett volna PIN kódot megadni. Tamás szerint a feloldóminta biztonságosabb, mint egy 6 jegyű PIN kód.

Egy, a leírás szerinti feloldóminta:



Készítsünk programot, amely eldönti a kérdést azáltal, hogy megszámolja a lehetséges, fent leírt feloldómintákat. Két feloldóminta akkor azonos, ha a csúcsokat azonos sorrendben érintik. A program a standard kimenet egyetlen sorába írja ki a feloldóminták számát.

Beküldendő egy `i495.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 39. Egy irodában N ember dolgozik. Minden embernek van egy preferenciája az iroda ideális hőmérsékletére vonatkozóan. Ha az irodában a hőmérséklet T, az i-edik ember preferenciája pedig P_i, akkor az adott dolgozó munkakerülési hajlama $|T-P_i|$. Az iroda munkakerülési hajlama az emberek munkakerülési hajlamainak összege. Adjuk meg minden emberre, hogy ha ő beállítja az iroda hőmérsékletét a saját preferencia-hőmérsékletére, akkor mennyi lesz az iroda munkakerülési hajlama.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N értékét és a következő N sor tartalmazza a P_i ideális hőmérsékleteket.

Kimenet: az i-edik sor tartalmazza az i-edik ember ideális hőmérsékletekor az iroda munkakerülési hajlamát.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`6` `-8 / 2 / 7 / -1 / 0 / 5`	`53 / 23 / 37 / 25 / 23 / 29`

Korlátok: $3\leqslant N\leqslant 10^5$, $-10^9\leqslant P_i\leqslant 10^9$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N\leqslant 1000$.

Beküldendő egy `is39.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 138. H. G. Tannhaus lakásán N darab perc- és óramutatós óra található a falon. Az órákat 1-től N-ig indexeljük. Az i-edik óra percmutatója m_i, óramutatója h_i hosszú. Tannhaus N napig vizsgálja az órákat. Az i-edik nap egy tetszőleges időpontjában felírja az i-edik óra két mutatója végpontjának távolságát egy lapra; mindegyik számot külön lapra. Azonban Tannhaus néhány távolságot (bár lehet, hogy egyet sem) elszámolt. Sőt a lapok még össze is keveredtek és nem lehet tudni, hogy melyik nap melyik lapra írt. Tudjuk az órák mutatóinak hosszát, valamint hogy a lapokon milyen számok vannak (az összekeveredést követően). Adjuk meg, hogy maximum hány mérést végezhetett el jól Tannhaus.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N számot. A következő sor N darab számot tartalmaz: az i-edik szám az m_i. Az ezt követő sor ugyancsak N darab számot tartalmaz: az i-edik szám a h_i. A bemenet utolsó sora N számot tartalmaz: az i-edik szám a keveredés után az i-edik lapon levő szám.

Kimenet: a program adjon meg egyetlen számot, a maximális helyes mérések számát.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**

`5`
`3 4 1 5 1`
`4 4 1 10 8`
`10 2 16 6 5`
	`4`

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 10^5$, $1 \leqslant$ mutató hossz, mérési érték (mind egész számok) $\leqslant$ $\leqslant 10^9$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 1000$.

Beküldendő egy `s138.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. december 10.

❄

Jelentés a 2019. évi Ericsson-díjazottakról

Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános- vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, méltassa és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai és természettudományos alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. A közel kétezer fős hazai vállalat nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem 1300 fős Kutatás-Fejlesztési Központjával a legnagyobb telekommunikációs és informatikai kutatással, szoftverfejlesztéssel foglalkozó szellemi centrum Magyarországon. Számára ezért elengedhetetlen a kiválóan képzett fiatal diplomás munkaerő. A most díjazott pedagógusok szakmai munkája és emberi hozzáállása hozzájárul ahhoz, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képviseljen, és vonzóvá tegye a beruházást infokommunikációs csúcstechnológiák kutatás-fejlesztésébe Magyarországon.

Az Ericsson-díj 2019. évi pályázati kiírása szerint általános- vagy középiskolákban 2 matematikát és 2 fizikát tanító pedagógusnak az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” díjat, további 2 matematikát és 2 fizikát oktatónak pedig az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” díjat ítélik oda, egyenként 400 000 Ft összeggel.

A Bolyai János Matematikai Társulat április 4-én, és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat április 11-én megtartott Ericsson-díjbizottsági ülésein üdvözölték, hogy az Ericsson megnövelte a díjak összegét, és új adatlapot vezetett be a felterjesztésekhez (ezek további javítása érdekében javaslatokat tettek). Idén a rangos kitüntetésre minden kategóriában a tavalyinál több felterjesztés érkezett. A matematika népszerűsítéséért díjra 14, tehetségeinek gondozásáért díjra 18 pedagógust terjesztettek fel. A fizika népszerűsítéséért díjra 15, tehetségeinek gondozásáért díjra 9 jelöltet javasoltak. Közülük választotta ki a két társulat bizottsága az idei díj várományosait. A javaslatokat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány kuratóriuma 2019. április 17-i ülésén jóváhagyta. Ennek alapján:

Az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” 2019. évi díját matematikából

Sztranyák Attila, a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium tanára és
Tóth Mariann, a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanára kapta.

Az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” 2019. évi díját fizikából

Dr. Oláh Éva Mária, a törökbálinti Bálint Márton Általános Iskola és Középiskola tanára és
Szabó Miklós, az egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium tanára kapta.

Az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” 2019. évi díját matematikából

Holló-Szabó Ferenc, az esztergomi Temesvári Perbál Ferences Gimnázium tanára és
Lányi Veronika, a pécsi Janus Pannonius Gimnázium tanára kapta.

Az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” 2019. évi díját fizikából

Teplitzky István, a miskolci Herman Ottó Gimnázium tanára és
Theisz György, a székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium és Általános Iskola nyugdíjas óraadó tanára kapta.

A díjazottakról készült portréfilmeket innen el lehet érni:

`https://www.komal.hu/hirek/ericsson/index.h.shtml`.

Gratulálunk az elismeréshez!

Nyári matematika- és fizikatábor 2019. Dombóvár

Matek olimpiai edzőtábor

A matek diákolimpiára komolyabban készülő diákok már ismerik egymást. Látják egymás nevét a KöMaL-ban, találkoznak olimpiai szakkörön, versenyeken. A 2018/19-es tanévben az utolsó olimpiai válogatót Kecskeméten szervezték a Mategye Alapítványnak köszönhetően. Ott az IMO, MEMO csapatok kialakultak, emellett körvonalazódott az utánpótlás gerincét adó társaság is. Ez a 20 diák kapott meghívást a június végén Dombóváron rendezett olimpiai edzőtáborba.

A matematika szakmai program reggelente egyéni feladatmegoldással indult. Ezt követően csapatban lehetett dolgozni, majd közös megbeszélésen néztük át a megoldásokat. Ezeket az alkalmakat *Dobos Sándor* és *Kiss Géza,* a budapesti Fazekas Gimnázium tanárai vezették. Munkájukat „ifiként” segítette *Kovács Benedek,* korábbi olimpikon, aki jelenleg Cambridge-ben tanul. A napi feladatsorokon szerepeltek a tavalyi olimpiára javasolt feladatok (shortlist példák), a táborvezetők által választott feladatok és a résztvevők által választott feladatok. A tábor előtt minden diák kapott ehhez iránymutatást. Az IMO csapat tagjai korábbi olimpiák feladatai közül válogatott, a többiek a british Mathematical Olympiad háromhárom évjáratából készítettek válogatást, amolyan keresztmetszetet. A táborban ezeket a feladatokat is igyekeztünk feldolgozni. A kiadott feladatok megbeszélésére még délután is volt egy hosszabb, közös alkalom. Csütörtökön a hagyományos MEMO jellegű csapatverseny került sorra, ennek feladatsorát *Williams Kada* állította össze, aki korábban a KöMaL **A** pontversenyének a gazdája is volt.

A táborban a matekosok a KöMaL fizikatáborán résztvevő diákokkal együtt voltak. Így esti előadásokon, szabadidős programokon lehetett beszélgetni, barátkozni, játszani. A közös záró tábortűz programját a fizikusok krumpliágyújának díszlövései indították, szalonnát sütöttünk, énekeltünk. A hét folyamán a tábor pályáján komoly focicsaták zajlottak, egyik délután pedig a Gunarasfürdő medencéiben pancsolhatott a társaság, élvezve a napsütést, a remek csúszdákat és a príma társaságot.

Reméljük jövőre is lesz hasonló tábor, ahol lehetőség van a komoly munkára és a vidám kikapcsolódásra egyaránt. Nagy ajándék, hogy a táborban az ország különböző helyeiről érkezett, közös érdeklődésű társaság jobban összekovácsolódhat.

Dobos Sándor

Nyári fizikatábor 2019.

Az idei KöMaL tábor volt életem első ilyen tábora, így minden program újdonság volt számomra. Már a tábor elején csoportokba szerveződtünk, mégpedig úgy, hogy lehetőség szerint az egy csapatban levők évfolyamának sorszámait összeadva ugyanolyan értékeket kapjunk. A lelkes szervezők igyekeztek minél jobban vegyíteni minket, hogy sok új emberrel tudjunk megismerkedni.

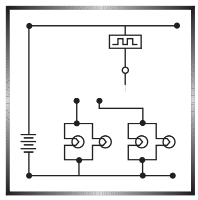
Minden reggel megkaptuk a feladatainkat: egy mérési, egy becslési és öt „számolós” problémát. Ez nem egyéni feladat volt, amire hamar rá is kellett jönnünk. Megpróbáltunk kooperálni és úgy beosztani a feladatokat, hogy mindenki a szintjének és korosztályának megfelelőt kapja. Ha pedig valamelyik csapattársunk elakadt, igyekeztünk segíteni, de a tanárok és az „ifik” is a segítségünkre voltak.

A mérési feladatok igényelték a legtöbb kreativitást, és ezek hozták legjobban össze a csapattagokat. Még a gunarasi strand medencéit is igénybe kellett vennünk az egyik napon, hogy minél több pontot szerezzünk. Ám ebben a táborban nem csak fizikások voltak. Jöttek matekosok is, akikkel minden nap együtt ettünk és a szabadidőnkben beszélgettünk. Az esti előadásokat tanáraink és az egyetemista segítőink tartották. Hallhattunk például előadást a fizikai szingularitásokról, a műanyag csövekben terjedő hanghullámokról, és programozásról is.

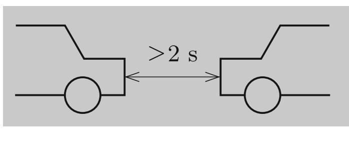
A tábor során a kedvenc feladatom a forrasztás volt, ahol ellenállásokat, illetve kondenzátorokat forraszthattunk össze. Szabadon szárnyalhatott a csapattagok képzelete, készíthettünk dodekaédereket, kockákat és többdimenziós „szuperkockákat”. Az elkészült munkánkkal kapcsolatos mérési és számolási feladatot is kaptunk: ki kellett számolnunk, majd méréssel is ellenőrizhettük az áramkörök eredő ellenállását, illetve a kondenzátoroknál az eredő kapacitást.

Idén a „konstrukciós feladat” az volt, hogy a héten felhasznált papírlapokból minél nagyobb teherbírású hidat építsünk. A mi csapatunk alkotása a hídavatás során a *hernyó* nevet kapta, ez korrelált az alakjával és a teherbírásával.

Pálfi Fanni Klaudia
ELTE Apáczai Csere János
Gyak. Gimn. és Koll., Budapest



Fizika gyakorlatok megoldása



G. 669. *Autópályák információs tábláin gyakran látható a mellékelt* rajzhoz *hasonló figyelmeztetés a megfelelő követési távolság betartására. Hogyan lehetséges a követési távolságot másodpercben megadni? Miért éppen* 2 s, *vagy annál nagyobb a megfelelő „követési távolság”?*

(*3 pont*)

Megoldás. A Magyarországon hatályos KRESZ 27. § (1) bekezdése alapján *Járművel másik járművet csak olyan távolságban szabad követni, amely elegendő ahhoz, hogy az elöl haladó jármű mögött – ennek hirtelen fékezése esetén is –*

meg lehessen állni. A jogszabály tehát sem távolságban, sem időtartamban nem határozza meg a követési távolság konkrét értékét.

A követési távolságot azért célszerűbb időegységben (másodpercben), semmint hosszúságmértékben megadni, mert a fékút – és így a követési távolság is – *sebességfüggő.*

A két másodpercben meghatározott követési távolság azt a távolságot jelenti, amelyet a jármű ennyi idő alatt megtesz. Ez a távolság az autópályán megengedett legnagyobb sebesség (130 km/h) esetén $s = vt = 72{,}2$ méter, 100 km/h esetén 55,5 méter, 80 km/h esetén pedig 44,4 méter.

A követési távolság időegységben történő megválasztásakor figyelembe kell venni, hogy a követési távolság nem azonos a féktávolsággal, azaz a teljes megálláshoz szükséges távolsággal. Nézzük meg, hogy mi történik egy v sebességgel haladó járművel a 2 másodperc alatt. Ez az időtartam két részből áll, egyrészt a *reakcióidőből,* amely alatt történik a veszély észlelése, a döntéshozatal és a fékpedál megnyomása (ez az emberi reakcióidő) és a fékhatás kialakulása (ez az autó „reakcióideje"). A reakcióidő alatt megtett út a „reakcióút", a fennmaradó idő alatt megtett út pedig a fékút, ez utóbbi során érvényesül a fékhatás.

A reakcióidő több tényezőtől is függ (fényviszonyok, fáradtság, fékpedál keresése), nagysága 0,5 és 1,5 másodperc közé esik, átlagos értéke 1 másodperc. Ezalatt az autó fékezés nélkül halad, és $s = vt$ reakcióutat tesz meg (130 km/h sebességnél 36,1 métert, 100 km/h esetén 27,8 métert, 80 km/h esetén pedig 22,2 métert). Tehát a reakcióidő alatt megtett út *sebességfüggő.* Ha a reakcióidő alatt megtett távolságon, tehát a reakcióúton belül lép fel hirtelen egy akadály (pl. gyalogos), akkor fékezéssel az ütközést nem lehet elkerülni. A reakcióidő alatt megtett út azonosan működő fékberendezések esetén elméletileg elegendő lehetne követési távolságnak, azonban figyelembe véve azt, hogy a reakcióidő az adott szituációban több lehet az átlagos 1 másodpercnél, illetve a máshogy működő fékberendezések miatt még szükség van a biztonságos lassításhoz néhány méterre, a közlekedésbiztonsági szakemberek 2 másodpercben határozták meg a biztonságos „követési távolságot".

Elmondhatjuk tehát, hogy észszerűtlen lenne az autópályán 130 km/h-nál lassabban haladóknak is a 72 m-es követési távolságot tartani, pl. egy 80 km/h-val haladó járműnek a 44,4 m-es távolság is elegendő a biztonságos közlekedéshez. A 2 másodperc követési távolság megadásával megvalósítható a sebességfüggő követési távolság előírása.

Megjegyzés. Van olyan KRESZ tábla, amely a követési távolságot 70 m-ben írja elő. Ennek mértéke az autópályán megengedett legnagyobb sebességhez (130 km/h) igazodik.

Hruby Lili (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 10. évf.)

50 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 9, hiányos (1 pont) 12 dolgozat.

G. 673. *Egy téglatest alakú akváriumot lassan feltöltünk vízzel. Hányszor nagyobb nyomóerő hat a teli akvárium egy-egy oldalfalára ahhoz képest, mintha csak egyharmadáig volna feltöltve?*

(*3 pont*)

Megoldás. Az akvárium alján a hidrosztatikai nyomást a $p=\varrho gh$ képletből kapjuk meg. Ebből következik, hogy az akvárium alján a nyomás a vízoszlop magasságával egyenesen arányos. Mivel a második esetben a vízoszlop magassága harmadára csökkent, a maximális nyomás is harmadolódik.

Az akvárium bármelyik falánál a víz átlagos nyomása a maximális nyomás fele, hiszen a nyomás a magassággal lineárisan változik. Ez a feles faktor azonban nem befolyásolja a különböző vízmagasságokhoz tartozó átlagos nyomások arányát, az ugyanannyi marad, mint a maximális nyomások aránya.

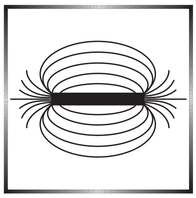
Egy adott nyomásnál az A nagyságú felületre kifejtett erő: $F=p\,A$. A második esetben a vízzel érintkező falfelület a harmadára csökken, így ha a nyomás nem változna, ez az erő a harmadára csökkenne.

A két hatást összevéve a második esetben fellépő erő a teletöltött akváriumnál tapasztalt erőhatásnak csak $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ része.

Papp Marcell Miklós (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 9. évf.)

32 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Hiányos (1 pont) 7, hibás 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5108. *Mekkora az a legkisebb sebesség, amellyel az m tömegű, q töltésű testet vákuumban fellőve már eljut a függőlegesen fölötte ℓ távolságban rögzített, Q töltésű testhez? (Q és q ellentétes előjelű töltések.)*

Adatok: $m=10^{-5}$ kg, $q=4{,}0\cdot 10^{-9}$ C, $Q=-1{,}0\cdot 10^{-7}$ C, $\ell=0{,}36$ m.

(*5 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

Megoldás. A v_0 kezdősebességgel fellőtt test legalább addig a magasságig kell eljusson, ahol a rá ható erők eredője nulla lesz. Ezen a ponton túljutva az elektrosztatikus vonzóerő már nagyobb a nehézségi erőnél, tehát a test felfelé gyorsulva eljut a felső testig. Ha ez a felső test alatt d távolságban történik meg, akkor

$$mg=\frac{kq\,|Q|}{d^2},$$

vagyis

$$d=\sqrt{\frac{kq\,|Q|}{mg}}\approx 0{,}192\ \mathrm{m}.$$

A továbbiakban azt kell megvizsgálnunk, hogy legalább mekkora mozgási energiával kell rendelkeznie a testnek az indulásakor ahhoz, hogy erre a megnövekedett potenciális energiájú helyre eljuthasson. A (gravitációs) helyzeti energia növekszik, hiszen a test $h=\ell-d=0{,}168$ m-rel került magasabbra, tehát

$$\Delta E_{\mathrm{h}}=mgh\approx 1{,}65\cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}.$$

Az elektrosztatikus potenciális energia viszont csökken, mert az ellentétes előjelű töltések kezdeti ℓ távolsága $d<\ell$-re csökken:

$$\Delta E_{\mathrm{e}}=kqQ\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\ell}\right)\approx -8{,}75\cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

A teljes (gravitációs+elektrosztatikus) potenciális energia megváltozása

$$\Delta E=\Delta E_{\mathrm{h}}+\Delta E_{\mathrm{e}}=7{,}8\cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

Ha a kezdeti mozgási energia nagyobb, mint ΔE, a fellőtt test átjut a h magasságban lévő holtponton:

$$\frac{mv_0^2}{2}>\Delta E,$$

vagyis az átjutáshoz elegendő kezdősebesség

$$v_0>\sqrt{\frac{2\,\Delta E}{m}}\approx 1{,}24\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Jánosik Áron (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

72 dolgozat érkezett. Helyes 37 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 23, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 2 dolgozat.

P. 5111. *Függőlegesen feldobunk egy pingponglabdát. Vajon mi tart hosszabb ideig: a labda felfelé, vagy lefelé mozgása? (A légellenállás számottevő.)*

(*3 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Megoldás. A pingponglabda jusson fel h magasságig, pillanatnyi magassága legyen x $(0<x<h)$. Ebben a magasságban a felfelé és a lefelé mozgó pingponglabda helyzeti energiája megegyezik, de mivel a súrlódási erő folyamatosan mechanikai energiát disszipál, adott x-nél a lefelé mozgó labda mozgási energiája kisebb lesz, mint amikor felfelé mozgott:

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{fel}}^2(x)>\frac{1}{2}mv_{\mathrm{le}}^2(x),$$

vagyis

$$v_{\mathrm{fel}}(x)>v_{\mathrm{le}}(x),\qquad \text{illetve}\qquad \frac{1}{v_{\mathrm{le}}(x)}>\frac{1}{v_{\mathrm{fel}}(x)}.$$

Ez minden x-re igaz, tehát a lefelé mozgó pingponglabdánál a sebesség reciprokának átlaga nagyobb, mint a lefelé mozgónál $\frac{1}{v(x)}$ átlagos értéke. (Az átlagolás nem időben, hanem az x koordináta szerint értendő.)

Mivel a felfelé és a lefelé mozgás időtartama

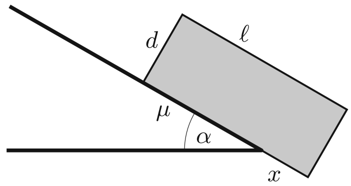
$$T_{\mathrm{fel}} = h \cdot \left(\frac{1}{v_{\mathrm{fel}}}\right)_{\text{átlag}} \qquad \text{és} \qquad T_{\mathrm{le}} = h \cdot \left(\frac{1}{v_{\mathrm{le}}}\right)_{\text{átlag}},$$

ebből látszik, hogy $T_{\mathrm{le}} > T_{\mathrm{fel}}$.

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata felhasználásával

54 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 1, hibás 12 dolgozat.

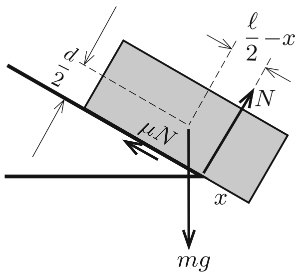
P. 5114. *Egy asztal peremére illeszkedik egy α hajlásszögű lejtő, amelyről egy ℓ hosszúságú, d magasságú, homogén anyageloszlású, téglatest alakú hasáb csúszik le. Mennyivel nyúlik túl a hasáb az asztal peremén, amikor elkezd lebillenni, ha*



a) a hasáb és a lejtő közötti súrlódás elhanyagolható;

b) a hasáb és a lejtő közötti súrlódási együttható μ? ($0 < \mu < \operatorname{tg}\alpha$, *és* $\mu d < \ell$.)

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház



Megoldás. Ha a tömegközéppontot tekintjük forgástengelynek, akkor nem kell figyelembe vennünk a tehetetlenségi erőket, vagyis hogy a test gyorsul. A lebillenés előtti kritikus pillanatban a testre ható forgatónyomatékok előjeles összege még éppen *nulla,* és a talaj által kifejtett nyomóerő (az *ábrán* látható módon) a lejtő végén hat, hiszen a következő pillanatban már csak itt fog érintkezni a hasáb és a lejtő, itt fejtenek ki egymásra erőt. A tömegközéppontra vonatkoztatva a nehézségi erőnek nincs forgatónyomatéka, elegendő tehát csak a lejtő N nyomóerejével és az $S = \mu N$ súrlódási erővel foglalkoznunk.

Az *a*) esetben csak a nyomóerő fejt ki forgatónyomatékot, hiszen súrlódási erő nem lép fel. A forgatónyomaték akkor lehet nulla, ha a nyomóerő hatásvonalába áthalad a forgástengelyen, ami $x = \ell/2$ esetén teljesül. Vagyis amikor a hasáb a hosszának felével nyúlik túl a lejtőn, a test akkor kezd lebillenni.

A *b*) esetben a súrlódási erő $S = \mu N \neq 0$, és ez az erő a lejtő síkjában, a lejtő esésvonalával párhuzamosan hat. Mivel a hasáb csúszik, teljesül a $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ feltétel. A határhelyzetben a testre ható forgatónyomatékok előjeles összege nulla:

$$\mu N \frac{d}{2} - N\left(\frac{\ell}{2} - x\right) = 0,$$

vagyis

$$x = \frac{\ell}{2} - \mu\frac{d}{2}.$$

Nyilván $x > 0$, ami $\mu d < \ell$ esetén teljesül. (Ha ez nem áll fenn, akkor a feladatban szereplő elrendezés nem jöhet létre, mert a téglatest a lejtőn csúszás közben már korábban eldőlne.) Amennyiben $\mu = 0$ teljesül, visszakapjuk az *a*) esetben levezetett eredményt.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Hiányos (2–3 pont) 5, hibás 5 dolgozat.

P. 5115. *Egy gömbszimmetrikus tömegeloszlású exobolygó tömege a Föld tömegének négyszerese, a nehézségi gyorsulás a – nem forgó – bolygó felszínén a földi érték kétszerese.*

a) *Mekkora a bolygó sugara és az átlagsűrűsége?*

b) *Mekkora a bolygón az első kozmikus sebesség?*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Legyen az exobolygó tömege, sugara, átlagsűrűsége, felszíni nehézségi gyorsulása és az első kozmikus sebessége rendre M', R', ϱ', g' és v', a megfelelő földi értékek pedig M, R, ϱ, g és v. Tudjuk, hogy $M' = 4M$, $g' = 2g$. A keresett mennyiségek: R', ϱ' és v', és felhasználjuk a következő – táblázatokban megtalálható – adatokat: $R \approx 6370$ km, $\varrho = 5{,}5\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$, $g = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $v = 7{,}9\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

a) A nehézségi gyorsulás, a bolygó tömege és a sugara közötti kapcsolat a Newton-féle gravitációs törvény alapján így írható fel:

$$g' = \gamma\frac{M'}{R'^2} = \gamma\frac{4M}{R'^2} = 2g = 2\gamma\frac{M}{R^2},$$

és ebből következik, hogy

$$\gamma\frac{4M}{R'^2} = 2\gamma\frac{M}{R^2}, \qquad \text{vagyis} \qquad R' = \sqrt{2}R \approx 9010\ \text{km}.$$

Az exobolygó átlagsűrűsége:

$$\varrho' = \frac{M'}{\frac{4}{3}R'^3\pi} = \frac{4M}{\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}\cdot R\right)^3\pi} = \frac{4}{\sqrt{8}}\,\frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \sqrt{2}\varrho \approx 7{,}8\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}.$$

b) Az első kozmikus sebesség a Newton-féle mozgásegyenlet szerint:

$$v' = \sqrt{\gamma\frac{M'}{R'}} = \sqrt{\gamma\frac{4M}{\sqrt{2}R}} = \sqrt[4]{8}\cdot\sqrt{\gamma\frac{M}{R}} = \sqrt[4]{8}\,v \approx 13{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Több dolgozat alapján

72 dolgozat érkezett. Helyes 51 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 14, hiányos (2–3 pont) 7 dolgozat.

P. 5116. *R és $3R$ belső sugarú vezető gömbhéj egymástól távol helyezkedik el, falvastagságuk $d \ll R$. A gömbök középpontjában $2Q$, illetve Q töltés van. Mekkora minimális munkával lehet ezeket a töltéseket felcserélni? (A falakon kis lyukak vannak.)*

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*

Megoldás. Mivel a gömbök egymástól nagyon távol helyezkednek el, az egyes töltések körüli térben a másik töltés által okozott torzulás elhanyagolhatóan kicsi. Ebben a közelítésben mindkét töltés közelében az elektromos erőtér gömbszimmetrikus Coulomb-tér, csak a vezető gömbhéjak belsejében különbözik attól: ott (egy-egy d vastagságú rétegben) az elektromos térerősség *nulla.*

Számítsuk ki az eletrosztatikus tér energiáját az eredeti és a felcserélt töltések esetében is. A kezdeti és a végállapot energiájának különbsége megadja a töltések felcseréléséhez szükséges minimális munka nagyságát.

Számítsuk ki, hogy mekkora az elektrosztatikus tér energiája akkor, ha két távoli, q_1 és q_2 nagyságú töltés körül egy-egy d vastagságú, r_1 és r_2 belső sugarú vezető gömbhéj található. Legyen az energia nullszintje az egymástól távoli két töltés terének energiája a fémgömbhéjak nélkül. (Ilyen választás mellett a gömbhéjakat tartalmazó elrendezés energiája negatív.)

Ismert, hogy egy V térfogatú térrészben az elektrosztatikus energia $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot V$, amennyiben a térrészben $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ nagysága mindenhol ugyanakkora. Mivel a gömbhéjakat tartalmazó és a gömbhéjak nélküli eset között csak annyi különbség, hogy az utóbbinál „hiányzik" a két gömbhéj belsejéhez tartozó energia, a minket érdeklő esetben tehát a rendszer energiája

$$W = -\frac{d}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{q_2^2}{r_2^2}\right).$$

A fenti összefüggés levezetésekor kihasználtuk, hogy a q_1 töltés körüli gömbhéj térfogata

$$V_1 \approx 4\pi r_1^2\, d,$$

és benne az állandó nagyságúnak tekinthető térerősség

$$E_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1}{r_1^2},$$

illetve a másik gömbhéj térfogata

$$V_2 \approx 4\pi r_2^2\, d,$$

és benne a térerősség nagysága

$$E_2 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2}{r_2^2}.$$

A kezdeti állapotban

$$q_1 = 2Q, \quad r_1 = R, \qquad \text{illetve} \qquad q_2 = Q, \quad r_2 = 3R,$$

tehát

$$W_{\text{kezdeti}} = -\frac{37}{72}\,\frac{d}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{R^2},$$

a töltések felcserélése után pedig

$$q_1 = Q, \quad r_1 = R, \qquad \text{illetve} \qquad q_2 = 2Q, \quad r_2 = 3R,$$

így

$$W_{\text{végső}} = -\frac{13}{72}\frac{d}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R^2}.$$

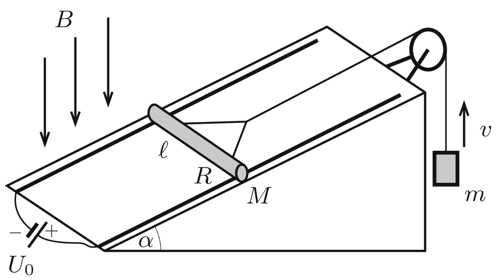
A töltések felcseréléséhez szükséges munka legalább

$$W_{\text{felcserélési}} \geqslant W_{\text{végső}} - W_{\text{kezdeti}} = +\frac{d}{3\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R^2}.$$

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) és
Marozsák Tádé (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Elek Péter, Makovsky Mihály, Marozsák Tádé, Olosz Adél, Sal Dávid és Sas Mór megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 4 dolgozat.

P. 5118. *Egy $\alpha = 30^\circ$-os hajlásszögű lejtőhöz két, egymástól $\ell = 10$ cm távolságra lévő, egymással párhuzamos, elhanyagolható ellenállású sín van rögzítve, melyeket az egyik végüknél állandó U_0 feszültségű áramforrás kapcsol össze. A sínekre merőlegesen egy $M = 30$ g tömegű, $R = 0{,}2\ \Omega$ ellenállású, vízszintes fémpálcát fektettünk, amely a síneken súrlódásmentesen mozoghat. A pálca közepéhez a sínekkel párhuzamos fonál csatlakozik, melynek elhanyagolható tömegű csigán átvetett függőleges darabjához egy $m = 50$ g tömegű nehezék van erősítve. A berendezés függőlegesen lefelé mutató, $B = 0{,}5$ T indukciójú, homogén mágneses mezőben van.*



Mekkora legyen az áramforrás feszültsége, hogy az m tömegű nehezék

a) függőlegesen felfelé,

b) függőlegesen lefelé $v = 10$ m/s sebességgel egyenletesen haladjon?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. Mivel $mg > Mg\sin\alpha$, a feszültség rákapcsolása nélkül az m tömegű nehezék gyorsulva süllyedne. A feszültségforrás bekapcsolása után a pálcán valamekkora (I erősségű) áram fog folyni, és a mágneses tér hatására vízszintes irányú, $BI\ell$ nagyságú Lorentz-erő lép fel. Az egyenletes mozgáshoz szükséges Lorentz-erő lejtő irányú komponense lefelé mutat, ami akkor valósul meg, ha az áram a feladat *ábráján* az óramutató járásával ellentétes irányba folyik.

Ha a pálca v sebességgel mozog lefelé a lejtőn, benne a mágneses tér hatására

$$U_{\mathrm{ind.}} = B\ell v\cos\alpha$$

nagyságú, a külső áramforrásével ellentétes polaritású feszültség indukálódik.

Az áramkörben folyó áram erősségét az eredő $U_0 - U_{\mathrm{ind.}}$ feszültség és a pálca ellenállása határozza meg:

$$I = \frac{U_0 - B\ell v\cos\alpha}{R}. \tag{1}$$

Egyenletes mozgáskor a fonalat mg nagyságú erő feszíti, és a pálcára ható eredő erő is zérus, vagyis

$$Mg\sin\alpha + B\ell I\cos\alpha - mg = 0. \tag{2}$$

Az (1) és (2) összefüggésekből kifejezhetjük az áramforrás feszültségét:

$$U_0 = vB\ell\cos\alpha + \frac{R}{\ell B\cos\alpha}g(m - M\sin\alpha). \tag{3}$$

a) Amikor az m tömegű nehezék felfelé mozog $v = 10$ m/s sebességgel, az adatok behelyettesítése után a szükséges telepfeszültségre $U_0 \approx 2{,}02$ V adódik.

b) A nehezék lefelé haladásakor is érvényben marad a (3) összefüggés, ha a jobb oldalának első tagjában $v = -10$ m/s-ot helyettesítünk be. Az egyenletes mozgáshoz szükséges feszültség ebben az esetben: $U_0 \approx 1{,}15$ V.

Molnár Mátyás (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A Lorentz-erőnek van a lejtő síkjára merőleges komponense is, emiatt a rúd és a sínek között fellépő N erő nem egyezik meg a szokásos $Mg\cos\alpha$-val. A feladatban szereplő mozgás csak akkor valósulhat meg, ha $N \geqslant 0$, mert a lejtő csak nyomóerőt fejthet ki a pálcára, húzni nem tudja azt. Általános esetben (a mozgás irányától függetlenül)

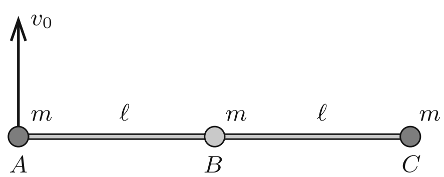
$$N = \frac{Mg - mg\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Jelen esetben $N = 0{,}06\ \mathrm{N} > 0$, tehát a pálca a sínen marad.

Máth Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

40 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 12, hiányos (1–3 pont) 14 dolgozat.

P. 5121. *Három (A, B és C jelű) kicsiny, egyforma, m tömegű golyó úgy van összekötve két elhanyagolható tömegű, ℓ hosszúságú rúddal, hogy az egyik rúd az A és a B golyót, a másik rúd a B és a C golyót köti össze. A B golyónál*

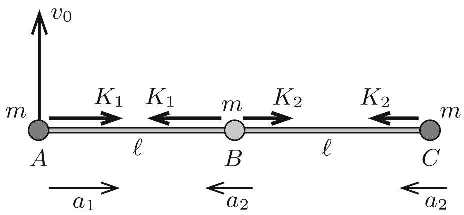


a kapcsolódás csuklós, így a rudak közötti szög akadálytalanul változhat. A rendszer a súlytalanság állapotában nyugalomban van, és a három golyó egy egyenes mentén helyezkedik el. Ekkor az A golyónak pillanatszerűen a rudakra merőleges, v_0 nagyságú sebességet adunk. Mekkora erő hat a rudakban az indítást követő pillanatban?

(*6 pont*) *Olimpiai versenyfeladat nyomán*

Megoldás. Az elhanyagolható tömegű, egymáshoz csuklósan kapcsolódó rudakat helyettesíthetjük vékony, hajlékony, nyújthatatlan fonalakkal. (Ez csak akkor tehető meg, ha a rudakban fellépő erő „húzóerő”, hiszen egy fonál nyilván nem tud nyomóerőt kifejteni. Látni fogjuk, hogy esetünkben ez a feltétel teljesül.)

Az indítást követő pillanatban a fonalak által kifejtett erők hatására a golyók gyorsulása „fonálirányú”, nagyságukat jelöljük az *ábrán* látható módon. (A B és C golyó gyorsulása a fonál nyújthatatlansága miatt egyenlő nagyságú. Ugyanezt az A és B golyókra már nem állíthatjuk, mert az A golyó a fonálra merőleges irányban mozog.)



Vizsgáljuk a testek mozgását a B és C golyók vonatkoztatási rendszeréből, ami az eredeti $\mathcal{K}$ rendszerhez képest balra, a_2 gyorsulással mozog. Ebben a $\mathcal{K}'$ rendszerben (amely *nem inerciarendszer,* tehát a Newton-egyenlet csak a tehetetlenségi erőkkel kiegészítve lenne érvényes) $a_2' = 0$ és $a_1' = a_1 + a_2$, a sebességek pedig változatlanok. Itt a kezdősebességet kapott A golyó körpályán kezd mozogni a középső golyó körül, így

$$a_1' = a_1 + a_2 = \frac{v_0^2}{\ell}. \tag{1}$$

Visszatérve a $\mathcal{K}$ inerciarendszerbe, felírhatjuk a mozgásegyenleteket. A golyókra ható erőket az ábrán látható módon jelölve

$$K_1 = ma_1; \qquad K_1 - K_2 = ma_2; \qquad K_2 = ma_2. \tag{2}$$

Ezekből (1) felhasználásával a

$$K_1 = \frac{2}{3}\,\frac{mv_0^2}{\ell} \qquad \text{és} \qquad K_2 = \frac{1}{3}\,\frac{mv_0^2}{\ell}$$

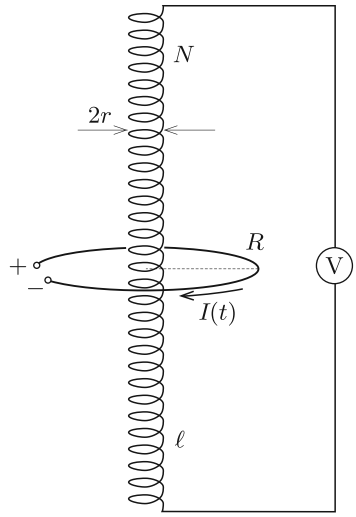
eredmény adódik. Mivel $K_1 > 0$ és $K_2 > 0$, a fellépő erők valóban húzóerők.

Marozsák Tádé (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

7 dolgozat érkezett. Helyes Elek Péter, Marozsák Tádé és Olosz Adél megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 1, hiányos (3 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

P. 5129. *Egy r sugarú, N menetszámú, igen hosszú, $n=N/\ell$ menetsűrűségű szolenoidot az ábrán látható módon egy $R\ll\ell$ sugarú körvezetővel vettünk körül. Mekkora értéket mutat a szolenoid végpontjai közé kapcsolt ideális voltmérő, ha a körvezetőbe időben egyenletesen, $I(t)=\alpha\cdot t$ módon változó áramot vezetünk?*

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest



Megoldás. A körvezető által gerjesztett mágneses mező megadása és az általa a szolenoidban indukált feszültség közvetlen kiszámítása igen nehéz feladat lenne. Szerencsére erre nincs is szükség, helyette elegendő a kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriatulajdonságát kihasználni.

A vezetőnek a szolenoidra vonatkozó kölcsönös indukció együtthatója ugyanakkora, mint a szolenoidnak a körvezetőre vonatkozó kölcsönös indukció együtthatója. Másképp fogalmazva: a körvezető időben változó erősségű árama ugyanakkora feszültséget indukál a szolenoidban, mint a szolenoid időben változó erősségű árama indukál a körvezetőben; feltéve, hogy a változás „sebessége" ugyanakkara. A második eset kiszámolása nyilván sokkal egyszerűbb feladat.

Ha a hosszú szolenoidban I erősségű áram folyik, és a külső („szórt") mágneses tér elhanyagolható, akkor a szolenoid belsejében, a végektől elegendően távol homogén mágneses tér alakul ki, és az indukcióvektor nagysága az Ampère-féle gerjesztési törvény értelmében: $B\ell=\mu_0NI$, vagyis $B=\mu_0nI$.

Mivel a körvezető sugara sokkal kisebb, mint a szolenoid ℓ hossza, a szolenoidon kívüli tér járuléka a körlapon áthaladó mágneses fluxushoz elhanyagolható, elegendő a tekercs belsejében lévő mágneses mező fluxusával foglalkoznunk. Ennek nagysága

$$\Phi=r^2\pi\cdot\mu_0nI\equiv MI.$$

Látjuk, hogy a kölcsönös indukció együtthatója (ami definíció szerint az egységnyi erősségű áramhoz tartozó mágneses fluxus): $M=\mu_0r^2\pi n$.

Miután kiszámítottuk M értékét, megadhatjuk a voltmérő által mutatott feszültség nagyságát is. Az áramerősség helyére $I(t)=\alpha t$ kifejezést írva és alkalmazva Faraday indukciótörvényét, megkapjuk a keresett feszültséget:

$$U=M\frac{\Delta I(t)}{\Delta t}=M\frac{\Delta(\alpha t)}{\Delta t}=M\,\alpha=\mu_0r^2\pi n\alpha.$$

Ez a feszültség – jó közelítéssel – független R-től, ha az ℓ-nél sokkal kisebb.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M . Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 10. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Elek Péter, Fiam Regina, Olosz Adél, Sal Dávid és Vaszary Tamás megoldása. Kicsit hiányos (1–3 pont) 3, hibás 1 dolgozat.

P. 5138. *Víz lehűlését vizsgáljuk elhanyagolható hőkapacitású, egyforma edényekben. A víz kezdeti hőmérséklete mindegyik esetben* 80 °C, *a célérték* 40 °C. *A környezet hőmérséklete* 30 °C, *ami a mérések során nem változik.*

(*i*) *Elsőnek azt mérjük, hogy* 2 *liter* 80 °C *hőmérsékletű víz* t_0 *idő alatt hűl le* 40 °C*-ra.*

(*ii*) *Másodszor csak addig várunk, amíg a kiindulási* 2 *liter* 80 °C *hőmérsékletű víz* 50 °C*-ra hűl le (ez* t_1 *időt vesz igénybe), majd gyorsan kiöntünk belőle* 1 *litert, aminek a helyére 1 liter,* 30 °C*-os vizet öntünk.*

(*iii*) *Ezután úgy ismételjük meg a mérést, hogy a kezdeti* 2 *liter* 80 °C*-os vízből azonnal kimerünk* 1 *litert, aminek a helyére* 1 *liter* 30 °C*-os vizet öntünk. Az így keletkezett* 2 *literes keverék* t_2 *idő alatt éri el a kívánt* 40 °C*-ot.*

(*iv*) *Végezetül a kezdeti* 2 *liter* 80 °C*-os vizet hagyjuk lehűlni* 60 °C*-ra, majd nagyon gyorsan* 1 *litert kiöntünk belőle, helyére* 1 *liter* 30 °C*-os vizet juttatunk, és hagyjuk a keveréket* 40 °C*-ra hűlni. Ekkor a teljes hűlési idő* t_3.

Melyik a leglassabb és melyik a leggyorsabb hűtési módszer? Fejezzük ki t_0 *segítségével* t_1*-et,* t_2*-t és* t_3*-at! Feltételezhetjük, hogy egy test hőmérséklet-változásának üteme egyenesen arányos a test és a környezete közötti hőmérséklet-különbséggel, azaz alkalmazható a Newton-féle lehűlési törvény.*

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. A Newton-féle lehűlési törvény szerint egy kezdetben T_0 hőmérsékletű test hőmérséklete t idő múlva

$$T = T_\mathrm{k} + (T_0 - T_\mathrm{k})\mathrm{e}^{-kt}, \tag{1}$$

ahol T_k a környezet hőmérséklete, k egy (a lehűlő test anyagától, tömegétől és a felületének nagyságától függő) állandó. A feladatban szereplő összes esetben k ugyanakkora. A lehűlési törvénybe a hőmérsékleteknek akár a Kelvin skála, akár a Celsius skála szerinti számértékeit írhatjuk be. Az (1) összefüggésből az időt kifejezve:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{T_0 - T_\mathrm{k}}{T - T_\mathrm{k}}\right)}{k}. \tag{2}$$

Tudjuk még, hogy ha egy liter T_1 és egy liter T_2 hőmérsékletű vizet összekeverünk, akkor a közös hőmérséklet $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ lesz.

(*i*) Az első esetben $T_0 = 80$ °C, $T_\mathrm{k} = 30$ °C és $T = 40$ °C, azaz (2) szerint

$$t_0 = \frac{\ln\left(\frac{80-30}{40-30}\right)}{k} = \frac{\ln(5)}{k}.$$

(*ii*) A víz t_1 idő alatt hűl le 50 °C-ra, majd a keverés után rögtön beáll a kívánt 40 °C. Fennáll tehát, hogy

$$t_1 = \frac{\ln\left(\frac{80-30}{50-30}\right)}{k} = \frac{\ln(2{,}5)}{k}.$$

(*iii*) A 80 °C-os és a 30 °C-os víz elkeveredése után a hőmérséklet 55 °C lesz, tehát a hűlés ideje most

$$t_2 = \frac{\ln\left(\frac{55-30}{40-30}\right)}{k} = \frac{\ln(2{,}5)}{k}.$$

(*iv*) Az első lehűlési szakasz végén a hőmérséklet 60 °C, ez a szakasz tehát

$$t_{3a} = \frac{\ln\left(\frac{80-30}{60-30}\right)}{k} = \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{k}$$

ideig tart. A második lehűlés elején a keverék 45 °C hőmérsékletű, a hűlés ideje

$$t_{3b} = \frac{\ln\left(\frac{45-30}{40-30}\right)}{k} = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{k}.$$

A teljes hűlési folyamat ideje most

$$t_3 = t_{3a} + t_{3b} = \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{k} + \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{k} = \frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{k}.$$

Látható, hogy az első hűtési módszer a leglassabb, a másik három viszont ugyanolyan gyors. Az előzőek alapján

$$t_3 = t_2 = t_1 = \frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{\ln(5)} t_0 = 0{,}57\, t_0.$$

Tiefenbeck Flórián (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

23 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3-4 pont) 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 390. Vízből készített prizmával, minél egyszerűbb módon bontsuk fel egy LED lámpa fehér fényét színeire! Írjuk le a módszert és az észlelés eredményét!

(*6 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

G. 685. Egy amerikai autó tankjába 15 gallon benzin fér. Hány mérföld utat tud megtenni a tulajdonos a teletankolt autóval, ha az autó európai katalógusa szerint a fogyasztása 6,5 liter/100 km?

(*3 pont*)

G. 686. Egy 1,5 tonna tömegű személyautó vízszintes úton áll. Mekkora felületen fekszik fel az autó az útra, ha a benzinkútnál beállított keréknyomás (túlnyomás) minden gumiabroncsban 2,5 bar?

(*3 pont*)

G. 687. Időjárásjelentésekben a hőmérséklet mellett a hőérzetet is fel szokták tüntetni, ami lehet alacsonyabb is, magasabb is, mint a hőmérővel mérhető adat. Ha a zuhanykabinban éppen befejezzük a zuhanyozást, akkor a fürdőszobában mérhetőnél magasabbnak érezzük a hőmérsékletet, ha viszont kinyitjuk a kabin ajtaját, mert kint hagytuk a törülközőnket, akkor a hőérzetünk azonnal sokkal alacsonyabb a fürdőszoba hőmérsékleténél. Magyarázzuk meg, mi az oka, hogy a hőérzetünk pillanatok alatt nagyot változik annak ellenére, hogy a fürdőszoba hőmérséklete közel állandó!

(*3 pont*)

G. 688. Régen a moziban a diavetítős mesefilmekhez hasonló filmszalagot használtak, csak az otthon vetítetteknél sokkal hosszabbakat. Egy percnyi film 27 méter hosszú szalagra fért rá. A filmszalagot tekercsekben tárolták, a tárolóorsó sugara 5,5 cm, erre 12,5 cm vastagon lehetett a filmet feltekercselni. Vetítés közben a film elhaladt a vetítőlencse előtt, majd egy másik, hasonló segédorsóra tekeredett fel.

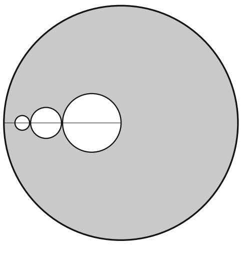
a) Mekkora fordulatszámmal forgott a tekercs a film lejátszásakor a vetítés elején és a végén?

b) A vetítés után a segédorsóról visszatekercselték a filmet az eredeti orsóra. Mekkora fordulatszámmal forgott a segédorsó a tekercselés elején és a végén, ha az eredeti orsót végig 3 fordulat/másodperc fordulatszámmal forgatták?

(*4 pont*)

P. 5164. Ugyanannyi idő alatt egy fonálinga 5, egy másik 10 kis amplitúdójú lengést végez. Milyen hosszúak az ingák, ha az egyik inga 120 cm-rel hosszabb a másiknál?

(*3 pont*) *Példatári feladat nyomán*



P. 5165. Egységsugarú, homogén, kör alakú lemezből az *ábrán* látható módon kivágunk egymást kívülről érintő, rendre $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ sugarú, középpontjukkal az egyik sugárra illeszkedő köröket. Hol lesz a maradék idom tömegközéppontja, ha

a) csak a legnagyobb kört vágjuk ki;

b) a két legnagyobb kört vágjuk ki;

c) nagyon sok kört vágunk ki?

(*5 pont*) Közli: *Tupi Zoltán,* Budapest

P. 5166. Egy Eötvös-inga $2r = 40$ cm-es rúdjának végeire egy-egy $m = 30$ g tömegű, kicsiny testet erősítünk. A rendkívül könnyű rúd egy hajszálvékony fémszálon függ, vízszintes helyzetben. Középétől mérve $R = 3$ m távolságban, vele azonos magasságban egy $m^* = 100$ kg tömegű ólomgolyót helyeztek el.

a) Mekkora forgatónyomatékot gyakorol az ólomgolyó az ingára, amikor a golyót és az ingarúd közepét összekötő egyenes φ szöget zár be a rúd irányával?

b) Ábrázoljuk a forgatónyomatékot φ függvényében! Mekkora szögnél lesz maximális a forgatónyomaték?

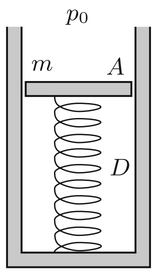
(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5167. Egy mosogató csapját enyhén megnyitva beállíthatjuk, hogy a víz függőleges, folyamatos sugárban folyjék ki, és így érje el a mosogató vízszintes alját. Egyik alkalommal a vízsugár átmérője becsapódáskor háromnegyed akkora volt, mint 20 cm-rel magasabban.

a) Mekkora volt ekkor a vízsugár becsapódási sebessége?

b) Mekkora nyomást fejt ki a vízsugár a mosogató aljára?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

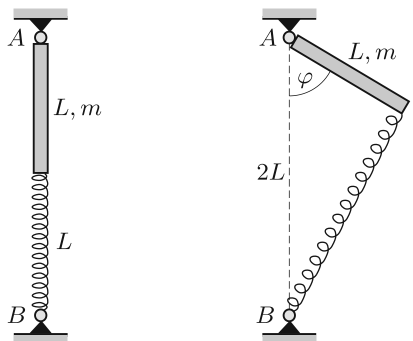


P. 5168. Egy A alapterületű, m tömegű dugattyúval elzárt hengerben V_0 térfogatú héliumgáz van. A dugattyút és a henger alját egy függőleges helyzetű, $D = 400$ N/m rugóállandójú, kezdetben nyújtatlan rugó köti össze.

Mennyi hőt kell közölnünk a gázzal ahhoz, hogy a dugattyú h magassággal megemelkedjen, ha a rendszer hőszigetelt?

Adatok: $A = 7$ dm^2, $m = 5$ kg, $V_0 = 4$ dm^3, $D = 400$ N/m, $h = 5$ cm és a külső légnyomás $p_0 = 100$ kPa.

(*4 pont*) Közli: *Kiss Tamás,* Heves



P. 5169. Az $L = 20$ cm hosszúságú, homogén tömegeloszlású, $m = 0{,}4$ kg tömegű rudat az egyik végénél a *bal oldali ábra* szerint az A pontnál lévő csuklóhoz erősítjük, amely körül minden irányban foroghat. A rúd másik végét egy $D = 25$ N/m direkciós erejű, függőleges helyzetű, erőmentes állapotban szintén L hosszúságú rugóhoz rögzítjük. Kezdetben a rugó és a rúd egy egyenesbe esik. Ezt követően a rudat (a *jobb oldali ábrán* látható módon) $\varphi = 60°$-kal kitérítjük, majd elengedjük.

a) Mekkora sebességgel lendül át a rúd vége a függőleges helyzeten?

b) A rudat az egyensúlyi helyzetéből kis szöggel kitérítjük, majd elengedjük. Mennyi idő alatt jut a rúd függőleges helyzetbe?

c) Mekkora szögsebességgel kell a rugó-rúd rendszert a függőleges AB tengely körül forgatni, hogy a rúdnak a függőlegessel bezárt szöge folyamatosan 60° legyen?

(A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

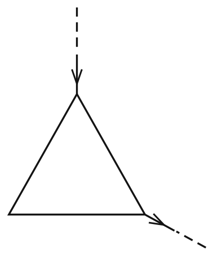
(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5170. Dörzsöléssel feltöltött, egyforma szívószálak vízszintes síkban, egymással párhuzamosan úgy helyezkednek el, hogy a végeiket összekötő egyenesek merőlegesek a szívószálakra. Feltételezhetjük, hogy a töltések eloszlása a szálakon egyenletes, és mindegyik szívószálnak ugyanakkora a töltése. A két szélső szál rögzített, egymástól való távolságuk jóval kisebb, mint egy szívószál hossza. Közöttük még néhány olyan szívószál helyezkedik el, amelyek szabadon elmozdulhatnak. Hogyan helyezkednek el ezek a szabadon mozgó szálak, ha számuk

a) kettő;

b) három?

(*5 pont*) Közli: *Márki-Zay János,* Hódmezővásárhely

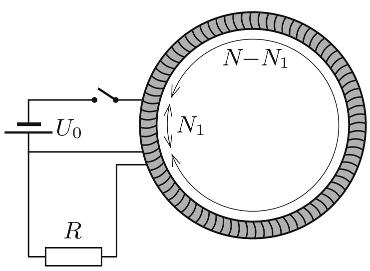


P. 5171. Huzalból egyenlő oldalú háromszöget készítettünk, és két csúcsát az *ábra* szerint áramforráshoz kapcsoltuk. A hozzá vezető vezetékben 10 A erősségű áram folyik. Mekkora a mágneses indukció a háromszög középpontjában? (Az áramkör távol zárul.)

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5172. Fényes evőkanalat tartunk 25 cm-re a szemünktől úgy, hogy a kanál szára függőleges. A kanál homorú felét nézve a fejünk fordított állású képét látjuk, míg a domború felét nézve a kép egyenes állású. Melyik képen látjuk a fejünk magasságát (függőleges méretét) nagyobbnak, és ez a kép hányszor nagyobb látószögben látszik a másiknál? A kanál függőleges metszetének görbületi sugara 5 cm.

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház



P. 5173. Egy $N=2000$ menetes, $L=5$ H induktivitású, elhanyagolható ohmos ellenállású körtekercs magja nagy mágneses permeabilitású gyűrű. A tekercs végeihez $R=200\ \Omega$-os ellenállás csatlakozik. A tekercs egyik vége és ettől számított $N_1=300$-adik menete közé egy $U_0=1{,}5$ V feszültségű akkumulátor kapcsolható.

a) Mekkora áram folyik a tekercs két részén $t_0=0{,}1$ s-mal a kapcsoló zárása után?

b) Mekkora energiát ad le az áramforrás t_0 idő alatt, és mire fordítódik ez az energia?

(*6 pont*) *A Kvant nyomán*

P. 5174. Egy illegális laboratórium ólomkonténerében olyan sugárzó anyagot találtak, amelyből másodpercenként $2\cdot 10^{14}$ elektron lép ki. A rendőrségi jegyzőkönyvek szerint 53 évvel ezelőtt eltűnt 221 g cézium a közeli kutatóintézetből. Lehet-e a megtalált anyag az akkor eltűnt preparátum, ha azóta csak raktározták? (A cézium felezési ideje 26,6 év.)

(*4 pont*) *Tematikus feladatgyűjtemény,* Szeged

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 8. November 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 482): **K. 634.** A sheet of graph paper has a grid of unit squares on it. A rectangle is drawn with sides lying along grid lines. Is it possible to draw a closed broken line in the rectangle along grid lines such that it should never leave the rectangle but it should pass through all the grid points in the interior and on the boundary of the rectangle, if the dimensions of the rectangle are *a*) 2019×2020 units; *b*) 2018×2020 units? If so, determine the length of the possible broken lines, too. **K. 635.** Consider a concave quadrilateral, and draw the diagonal that lies in its interior. The diagonal divides the quadrilateral into two triangles. Prove that the areas of the two triangles are equal if and only if the line of this diagonal bisects the other diagonal. **K. 636.** Find all possible values of the digits x and y for which every nonzero digit occurs the same number of times in the prime factorization of the eight-digit number $\overline{xyxyxyxy}$ in decimal notation. (In making the prime factorization, identical prime factors are not written as a power but written down as separate factors.) **K. 637.** Let us consider the integer 12345678901234567890. . . 1234567890 consisting of 2020 digits. First we remove the digits at every odd position. Then, from the remaining 1010 digits, we remove the digits at every even position. Then, repeating in the same way, from the remaining 505 digits, we remove the digits at every odd position. This alternating process is continued until a single digit remains. Determine this digit. **K. 638.** Fibonacci-type sequences are defined as sequences in which, from the third term onwards, each term is the sum of the preceding two terms. For example, the sequence $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ starting with 1, 1 (the Fibonacci sequence itself), and the sequence $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$ starting with 1, 3 are both Fibonacci-type sequences. Find the Fibonacci-type sequence that contains only positive integers, contains 2010 as a term, and has the largest possible number of terms before 2010.

New exercises for practice – competition C (see page 483): **Exercises up to grade 10: C. 1567.** Find the real solutions of the equation $2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$. (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **C. 1568.** Let D be the midpoint of side AB of a triangle ABC, E the midpoint of side AC, and P, Q the centres of the circumscribed circles of triangles DEB and DEC, respectively (assume that $P\neq Q$). Prove that line PQ is perpendicular to line BC. (Proposed by *D. Hegedűs,* Gyöngyös) **Exercises for everyone: C. 1569.** In a class of 24, there are an odd number of students whose first name is Sophia. When the class is listed in alphabetical order (of family names) and students are numbered in this order, the number of the first Sophia on the list is equal to the number of Sophias in the class, and the number of the third Sophia on the list is three times the number of Sophias in the class. Given that each Sophia on the list is immediately preceded or followed by another Sophia, determine the numbers assigned to all the Sophias on the list. (Based on a problem by *L. Hommer,* Kemence) **C. 1570.** In a hexagon, the measure of each angle is 120°, and the diagonals connecting opposite vertices are equal in length. Prove that the hexagon has rotational symmetry. (Proposed by *K. Fried,* Budapest) **C. 1571.** The positive integers from 1 to n^2 are written in increasing order in an $n\times n$ table: the numbers 1 to n are entered in the first row, $(n+1)$ to $2n$ in the second row; and so on. Prove that the sum of the numbers in one diagonal equals the sum of the numbers in the other diagonal. **Exercises upwards of grade 11: C. 1572.** In a trapezium $ABCD$, let M denote the intersection of diagonals AC and BD, and let N and P denote the centres of the circumscribed circles of triangles ABC and ACD, respectively. Prove that M, N and P are collinear if and only if $ABCD$ is a parallelogram or a cyclic trapezium. **C. 1573.** Show that the sum $12^{2n}+7^{2n-1}+3^{3n}+4^{4n-2}-2^{2n}-11^{2n}$ is divisible by 23 for all positive integers n. (Proposed by *T. Imre,* Marosvásárhely)

New exercises – competition B (see page 484): **B. 5054.** Are there positive integers n and k such that $20^k+19^k=2019^n-10^n$? (*4 points*) (Proposed by *T. Imre,* Marosvásárhely) **B. 5055.** Given a circle k in the plane, determine the locus of the orthocentres of all triangles inscribed in k. (*3 points*) **B. 5056.** Consider the quadratic function $f(x)=x^2+bx+c$ defined on the set of real numbers. Given that the zeros of f are some distinct prime numbers p and q, and $f(p-q)=6pq$, determine the primes p and q, and determine the function f. (*3 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5057.** Let D and E be points on leg BC of a right-angled triangle with hypotenuse AB such that $\angle DAC=\angle EAD=\angle BAE$. The feet of the perpendiculars dropped from vertex C onto the line segment AD and from point D onto the hypotenuse AB are F and K, respectively. Line CK intersects line segment AE at point H, and the parallel line drawn from point H to the line AD intersects line segment BC at point M. Show that point F is the circumcentre of triangle CHM. (*5 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5058.** Let P be an arbitrary point in the interior of triangle ABC. Lines AP, BP and CP intersect sides BC, AC, and AB at points A_1, B_1 and C_1, respectively. Prove that $\frac{AP}{A_1P}\cdot\frac{BP}{B_1P}\cdot\frac{CP}{C_1P}\geqslant 8$. (*4 points*) (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **B. 5059.** For a positive integer c, define the sequence $\{a_n\}$ by the following recurrence relation: $a_0=c$ and $a_{n+1}=\left[a_n+\sqrt{a_n}\,\right]$ for $n\geqslant 0$. Prove that if 2019 occurs as a term of the sequence, then no preceding term is a perfect square, but there are infinitely many perfect squares among the following terms. (*5 points*) **B. 5060.** In the plane Σ, given a circle k and a point P in its interior, not coinciding with the center of k. Call a point O of space, not lying on Σ, a *proper projection center* if there exists a plane Σ', not passing through O, such that, by projecting the points of Σ from O to Σ', the projection of k is also a circle, and its center is the projection of P. Show that the proper projection centers lie on a circle. (*6 points*) **B. 5061.** A function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is called *area preserving* if the area of the triangle formed by the points $\big(a,f(a)\big)$, $\big(b,f(b)\big)$ and $\big(c,f(c)\big)$ is equal to the area of the triangle formed by points $\big(a+x,f(a+x)\big)$, $\big(b+x,f(b+x)\big)$ and $\big(c+x,f(c+x)\big)$ for all $a<b<c$ and x. Which continuous functions f are area preserving? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 485): **A. 761.** Let $n\geqslant 3$ be a positive integer. We say that a set S of positive integers is *good* if $|S|=n$, no element of S is a multiple of n, and the sum of all elements of S is not a multiple of n either. Find, in terms of n, the least positive integer d for which there exists a good set S such that there are exactly d nonempty subsets of S the sum of whose elements is a multiple of n.

(Proposed by *Aleksandar Makelov,* Burgas, Bulgaria and *Nikolai Beluhov,* Stara Zagora, Bulgaria) **A. 762.** In a forest there are n different trees (considered as points), no three of which lie on the same line. John takes photographs of the forest such that all trees are visible (and no two trees are behind each other). What is the largest number of orders of in which the trees that can appear on the photos? (Proposed by *Gábor Mészáros,* Sunnyvale, Kalifornia) **A. 763.** Let $k \geqslant 2$ be an integer. We want to determine the weight of n balls. One try consists of choosing two balls, and we are given the sum of the weights of the two chosen balls. We know that at most k of the answers can be wrong. Let $f_k(n)$ denote the smallest number for which it is true that we can always find the weights of the balls with $f_k(n)$ tries (the tries don't have to be decided in advance). Prove that there exist numbers a_k and b_k for which $\left|f_k(n) - a_k n\right| \leqslant b_k$ holds. (Proposed by *Surányi László,* Budapest and *Bálint Virág,* Toronto)

Problems in Physics

(see page 505)

M. 390. By means of a prism made from water, in a simple way split the white light of a LED lamp into components. Write down the method and the result of the observation.

G. 685. The fuel tank of an American car can hold 15 gallons of gasoline. How many miles can the driver of the car go with the car, which was initially filled fully with gasoline, if according to the European catalogue of the car the fuel consumption of the car is 6.5 litres per 100 kilometres? **G. 686.** A 1.5-ton car is staying at rest on a horizontal road. Find the size of the surface the car touches the road, if the pressure in each tyre was adjusted to the value of 2.5 bars at the petrol station. **G. 687.** In a weather forecast not only the temperature but the "feels like" temperature is often given, which might be lower or higher than the temperature measured by the thermometer. When we have just finished a shower in the shower enclosure, then we feel the temperature warmer than the measured temperature in the bathroom, but if we open the door of the enclosure, because we left the towel outside, then our "feels like" temperature is much lower than the real temperature in the bathroom. Explain what is the reason for the fact that despite the temperature in the bathroom is nearly constant, our sense of temperature changes so abruptly. **G. 688.** Some time ago in the movies filmstrips, similar to the ones in children's tale film projectors, were used, just the movie filmstrips were much longer. The length of the filmstrip of a one-minute film was 27 metres. The films were wound on reels, which had a radius of 5.5 cm, and the width of the film roll on it was 12.5 cm. When a film was projected, the film was wound off the reel, called the feed reel, and wound on another reel, called the takeup reel. *a*) What was the number of revolution of the feed reel at the beginning and at the end of the projection of the film? *b*) After the projection the film was wound back from the takeup reel to the feed reel. What was the number of revolution of the takeup reel at the beginning and at the end of the re-wound process if the feed reel was rotated at constant 3 revolutions per second for all the time?

P. 5164. In the same amount of time, the number of complete small-amplitude swings of two simple pendulums are 5 and 10. What are the lengths of the pendulums if one of them is 120 cm longer than the other? **P. 5165.** Circles, which touch each other externally and whose centres are on the same radius of a uniform-density disc of unit radius, are cut out from the disc as shown in the *figure.* The radii of the circles which are cut out are $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$. Where is the centre of mass of the remaining part of the disc if *a*) only the greatest circle, *b*) the two greatest circles, *c*) a lot of circles are cut out from the disc? **P. 5166.** A small object of 30 grams is attached to each end of a 40 cm long rod of an Eötvös pendulum. The extremely light rod is hanging on a very thin metal thread horizontally. A lead ball of mass 100 kg was placed to a distance of three metres from the centre of the rod at the same height as the rod. *a*) What is the torque exerted on the pendulum by the lead ball, when the angle between the line of the rod and the line which joins the centre of the rod and the ball is φ? *b*) Plot the torque as a function of the angle φ. At what angle will the torque be maximum? **P. 5167.** The faucet of a kitchen sink is opened slightly such that the water flows vertically at a constant rate and reaches the horizontal bottom of the sink. The diameter of the water flow at the bottom of the sink is 3/4 of the diameter of the water at 20 cm higher. *a*) What is the speed of the water at which it hits the bottom of the sink? *b*) What is the pressure exerted by the water at the bottom of the sink? **P. 5168.** In a closed cylinder there is a sample of helium gas of volume 4 dm^3. The base area of the cylinder is 7 dm^2 and the cylinder is closed with a 5 kg piston. The piston and the bottom of the cylinder is connected with a vertical, initially unstretched spring of spring constant 400 N/m. How much heat should be added in order that the piston rise by 5 cm? (The external pressure is 100 kPa, and the system is thermally insulated.) **P. 5169.** One end of a uniform-density rod of mass $m = 0.4$ kg and of length $L = 20$ cm is attached to a hinge at point A, as shown in the *left figure,* about which it can be rotated in any direction. The other end of the rod is attached to a vertical spring of spring constant $D = 25$ N/m, which also has a length of L when there is no force exerted on it. Initially the spring and the rod are in the same line. Then the rod is displaced (as it is shown in the *right figure*) by an angle of $\varphi = 60^\circ$, and then it is released. *a*) What is the speed of the end of the rod when it passes the vertical position? *b*) The rod is displaced from the equilibrium position by a small angle, and then it is released. How long does it take for the rod to reach the vertical position? *c*) By what angular speed should the spring-rod system be rotated about the vertical axis AB in order that the angle between the rod and the vertical be constantly 60°? (Friction is negligible everywhere.) **P. 5170.** Some alike plastic straws were charged with rubbing and placed parallel to each other such that the line which joins their endpoints is perpendicular to the straws. It can be assumed that the distribution of charges on each straw is uniform, and all of them have the same charge. The two straws at the two ends are fixed such that their distance is much smaller than their length. Between them there are some straws which can move freely. What is the position of these straws if their number is *a*) two; *b*) three? **P. 5171.** An equilateral triangle is made of a piece of wire and two of its vertices are connected to a current supply as shown in the *figure.* The current in the wire which is connected to the vertex of the triangle is 10 A. What is the magnetic induction at the centre of the triangle? (The circuit is closed far from the triangle.) **P. 5172.** A shiny spoon is held in front of our eye at a distance of 25 cm such that the stem of the spoon is vertical. If the concave side of the spoon is observed, then an inverted image of our head can be seen, whilst if the convex part of the spoon is observed, then the image is upright. In which case will the height of the image of our head (its vertical size) appear greater? By what factor the angle subtended by the larger image is greater than that of the smaller image? The radius of curvature of the vertical section of the spoon is 5 cm. **P. 5173.** The core of a toroidal inductor of inductance $L = 5$ H, number of turns $N = 2000$, and of negligible ohmic resistance is a ring of high magnetic permeability. An ohmic resistor of resistance $R = 200\ \Omega$ is connected to the two terminals of the coil. A rechargeable battery of voltage $U_0 = 1.5$ V can be connected across one terminal of the coil and its 300th turn counted from that terminal. *a*) What is the current in the two parts of the coil $t_0 = 0.1$ s after the switch in the circuit was turned on? *b*) How much energy is supplied by the battery in the time of t_0, and what is this energy transferred to? **P. 5174.** In a lead container of an illegal laboratory some radiating material was found, which emits $2 \cdot 10^{14}$ electrons in a second. According to police reports 221 g caesium disappeared from the nearby research institute 53 years ago. Can the found material be the 53-year ago disappeared sample, if it was only stored? (The half life of caesium is 26.6 years.)