# KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
## INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
## ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 6. szám Budapest, 2020. szeptember

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK





A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

# IMO felkészülés a koronavírus árnyékában, 2020

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) tervezett helyszíne Szentpétervár volt. Ez a beszámoló ennek a különleges évnek a felkészülési krónikája. Először a szakkörök és válogatók történetét mutatjuk be, majd a nyáron sorra került CMC versenyt.

Még március első napjaiban sem lehetett tudni, mi vár ránk. A Rényi Intézet nagytermében március 10-én, kedden a szokásos módon lezajlott a Surányi János emlékverseny, amely a második olimpiai válogatóverseny. A versenyen 44 diák adott be dolgozatot. Ugyanezen a héten, március 13-án, pénteken volt az utolsó központi olimpiai szakkör Budapesten. A viharos gyorsasággal változó járványhelyzet miatt erre már kevesen jöttek el. Ezen a hétvégén indult az országos veszélyhelyzet és a digitális oktatás. A szakköröket át kellett alakítani, március 27-én az előre meghirdetett olimpiai szakkör időpontjában volt az első zoom-os online olimpiai szakkör. Erre emailben meghívást kapott minden, a Surányi versenyen részt vett diák. A válogatóverseny feladatait beszéltük meg, minden feladat megoldását a javítója mutatta be, kitérve különböző megoldásokra. Szó esett arról is, mire lehetett részpontszámokat kapni. A feladatok felelősei sorban: *Dobos Sándor, Kovács Benedek* és *Borbényi Márton.* A megoldások ismeretében lehetett a dolgozatokkal, azok javításával kapcsolatban kérdéseket feltenni, észrevételeket tenni. Amint ezek tisztázódtak, Benedek tájékoztató honlapján[1] megjelentette az eredményeket, majd a visszalépések után kialakult az utolsó, kétnapos válogató névsora. Ezt az utóbbi években a Mategye Alapítvány segítségével – melyet ez úton is köszönünk – Kecskeméten rendeztük. A karantén miatt az április végi kecskeméti verseny elmaradt. Helyette együtt izgultunk a lányokért, akik az online EGMO-n remekül szerepeltek.

Az év végére még három online zoom-os olimpiai szakkör maradt (április 24., május 8. és május 22.). Ezeken korábbi évek válogatóversenyeit dolgoztuk fel. A megoldások ismertetésében közreműködött *Lenger Dániel, Williams Kada, Baran Zsuzsa.* A zoom-os szakkörökön rendszeresen részt vett *Kós Géza,* aki tanulságos megjegyzésekkel, útmutatásokkal, tanácsokkal segítette a diákokat. Az egyik feladat megoldása kapcsán bemutatta a számelméletben fontos LTE lemmát, és annak alkalmazásához külön gyakorló feladatsort küldött. Minden közreműködőnek nagy köszönet jár! Az online munkaforma lehetőséget teremtett arra is, hogy a csapat korábbi vezetője, *Pelikán József* és utóda, *Frenkel Péter* is otthonából „jelen lehessen" a szakkörön.

Aki még nem járt olimpiai szakkörön, annak nehéz elmagyarázni, miért van ennek a szakkörnek különleges hangulata, varázsa. Ahogy belép az ember a terembe, együtt látja az ország különböző részeiről összegyűlve mindazokat, akik az adott évjáratokon a matematikával komolyabban foglalkoznak. Például az idei

[1] `http://benoke98.f.fazekas.hu/olimpia/`

évben a szakkör törzshelye volt a Szegedről, Győrből, Debrecenből, Kecskemétről és persze Budapest különböző iskoláiból jövő diákoknak. Az online szakkörökön ugyanezek a diákok hosszas utazás nélkül részt vehettek, otthonukból kapcsolódhattak a munkába. Ennek kétségtelenül vannak előnyei is, de mégis hiányzott a személyes találkozás.

A korlátozások enyhítése után június 4-5 –én rendeztük meg az utolsó versenyt, ennek javításában a csapatok vezetői mellett segített Borbényi Márton, *Csahók Tímea, Imolay András,* Kovács Benedek, *Lenger Dániel.* A versenyen szerzett pontok az említett honlapon követhetők, a kialakult csapatok:

IMO: **Beke Csongor, Gyimesi Péter** (mindketten a Békásmegyeri Veres Péter Gimnáziumból), **Kocsis Anett, Nagy Nándor, Tóth Balázs** (ők hárman a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumból), **Weisz Máté** a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumból;

MEMO: **Fleiner Zsigmond, Füredi Erik, Hámori Janka, Kovács Tamás, Várkonyi Zsombor, Szabó Kornél** (Hámori Janka a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumból, a többiek a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumból).

Idén a MEMO és az IMO is online verseny lesz, a csapatoknak sok sikert kívánunk!

Az utóbbi években Dombóváron volt júniusban olimpiai edzőtábor, ezt idén le kellett mondani. Az IMO sorsa is lassan kezdett körvonalazódni, szeptemberre került át. Júniusban kereste meg a szervezők Frenkel Péter csapatvezetőt azzal, hogy az IMO szokásos idejében egy online világversenyt szerveznek, melynek neve Cyberspace Mathematical Competition, azaz CMC. Az országokat legfeljebb hatfős csapat képviselheti legalább egy lány taggal, vagy legfeljebb nyolcfős csapat legalább két lány taggal. Az IMO csapatból négyen tudták magukat szabaddá tenni a verseny idejére, hozzájuk csatlakozott a MEMO csapat azon négy tagja, akik a válogatókon a legtöbb pontot gyűjtötték. Az utóbbi évek komoly EGMO-s felkészítésének is köszönhető, hogy Anett és Janka révén nyolcfős csapatunk lehetett. A Bolyai Társulat segített a szervezésben. A dombóvári Európa Hotelben írhattuk a versenyt, a nyári melegben is kellemes alagsori konferenciatermekben. A feladatokat csatolva találjuk. A versenyt az MAA (Mathematical Association of America) szervezte az AoPS internetes oldal támogatásával.

Felvetődik a kérdés: hogyan lehet a javítást egységesen végezni? Nos, minden dolgozatot szkennelve elküldtünk; ezeket egy honlapon keresztül minden regisztrált javító megnézhette. Éltem is ezzel a lehetőséggel, és több ország diákjainak dolgozatába belenéztem. A kiküldött pontozási útmutató alapján a csapatvezetők javasoltak egy pontszámot, majd ezt a koordinátorok vagy jóváhagyták, vagy megindult egy egyeztetés. Nálunk a legtöbb javasolt pontszámot azonnal jóváhagyták, néhány esetben kértek segítséget a fordításhoz, egy-két esetben a pontozást kellett finomítani. Minden diák dolgozatainál feladatonként nyomon lehetett követni, hogyan is zajlott az értékelő levélváltás. Ebből kiderült, a koordinátorok komoly munkát végeztek. Kós Géza is közreműködött a versenyen, dolgozott a problémakiválasztó bizottságban. A verseny második feladata az ő javaslata volt, ennek koordinátori csapatában is dolgozott. A versenyről készült tájékoztató kiadványban[2] megtalálható az összes szervező és közreműködő.

Az IMO-tól egy kicsit eltért ez a verseny, hiszen mindkét napon 5 órán át lehetett dolgozni és mindkét napon 4 feladatot tűztek ki. A szervezők szándéka szerint ezek egyre nehezedtek, az első könnyebb, a többi IMO szintű volt. Végül 75 ország 555 versenyzője mérte össze tudását. A magyar csapat az országok sorrendjében 14. lett. Kocsis Anett és Weisz Máté arany-, Gyimesi Péter, Hámori Janka és Tóth Balázs ezüst-, Fleiner Zsigmond és Várkonyi Zsombor bronzérmet szereztek, Kovács Tamás dicséretet kapott. A háromnapos dombóvári program a feladatok javításával és a megoldások megbeszélésével zárult. Egy ilyen verseny nyilvánvalóan közel sem teremti meg a szokásos IMO atmoszféráját, másrészről viszont örülhetünk, hogy a járványhelyzet ellenére nemzetközi megmérettetésben vehettünk részt, jó, biztonságos körülmények között, minimális utazással, szervezéssel. A verseny honlapján[3] megnézhetjük a videós „záróünnepséget” és a részletes eredménylistát is.

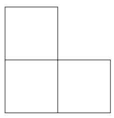
Vajon mit hoz a jövő? Az utazós világversenyek helyett ilyenekre számítsunk? Egyelőre ezt még nem lehet tudni, mindenesetre most készülhetünk és várhatjuk augusztus végén a MEMO-t es a szeptemberi online IMO-t.

Írta **Dobos Sándor** Mátrafüreden, a MaMuT táborban, augusztus 5-én

## A CMC verseny feladatai

### Első nap

**1. feladat.** Tekintsünk egy $n \times n$ egységnégyzetből álló táblát. A tábla főátlója abból az $n$ egységnégyzetből áll, amelyek a bal felső sarkot a jobb alsóval összekötő átló mentén vannak. Van korlátlan számú ilyen csempénk:



A csempéket elforgathatjuk. Úgy szeretnénk csempéket elhelyezni a táblán, hogy mind- egyik csempe pontosan három egységnégyzetet fedjen le, a csempék ne fedjék át egymást, a főátló egységnégyzetei közül semelyik se legyen lefedve, és minden más egységnégyzet pontosan egyszer legyen lefedve. Mely $n \geqslant 2$ számokra lehetséges ez?

**2. feladat.** Legyen $f(x) = 3x^2 + 1$. Bizonyítandó, hogy bármely adott pozitív egész $n$ esetén az

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$$

szorzatnak legfeljebb $n$ különböző prímosztója van.

[2] `https://data.artofproblemsolving.com/images/contests/CMC_brochure.pdf`

[3] `https://artofproblemsolving.com/contests/cmc`

**3. feladat.** Legyen $ABC$ olyan háromszög, amelyre $AB > BC$, és legyen $D$ a $BC$ szakasznak egy változó belső pontja. Legyen $E$ az a pont az $ABC$ háromszög körülírt körén, a $BC$-nek $A$-val ellentétes oldalán, amelyre $BAE\sphericalangle = DAC\sphericalangle$. Legyen $I$ az $ABD$ háromszög beírt körének középpontja, és legyen $J$ az $ACE$ háromszög beírt körének középpontja. Bizonyítandó, hogy az $IJ$ egyenes átmegy egy rögzített ponton, amely független $D$-től.

**4. feladat.** Legyen $n$ páratlan pozitív egész. Egy $n \times n$ mezőből álló sakktábla bizonyos mezőit zöldre színezzük. Az derül ki, hogy a sakkjáték-beli király bármely zöld mezőről bármely másik zöld mezőre el tud jutni lépések véges sorozatával úgy, hogy eközben csak zöld mezőkön halad át. Bizonyítandó, hogy ezt legfeljebb $\frac{n^2-1}{2}$ lépésben mindig meg tudja tenni. (A király egy lépésben egy mezőről akkor és csak akkor léphet át egy másikra, ha a két mezőnek van közös csúcsa vagy oldala.)

## Második nap

**5. feladat.** Egy táblára 2020 darab pozitív egész szám van felírva. Zuming minden percben letöröl két számot és helyettük az összegüket, különbségüket, szorzatukat vagy hányadosukat írja fel. Ha például Zuming a 6 és 3 számokat törli le, akkor a $\{6+3, 6-3, 3-6, 6\cdot 3, 6:3, 3:6\} = \left\{9, 3, -3, 18, 2, \frac{1}{2}\right\}$ halmaz egy elemével helyettesíti őket. 2019 perc után Zuming a $-2020$ számot írja fel egyetlenként a táblára. Mutassuk meg, hogy ugyanezen szabályokkal, ugyanabból a 2020 darab egész számból indulva az is lehetséges lett volna, hogy Zuming egyetlen számként a 2020-szal fejezze be az eljárást.

**6. feladat.** Határozzuk meg mindazon $n \geqslant 3$ egészeket, amelyekre a következő állítás igaz: Ha a $P$ konvex $n$-szögnek $n-1$ oldala egyenlő hosszúságú és $n-1$ szöge egyenlő nagyságú, akkor $P$ szabályos sokszög. (Egy sokszög *szabályos,* ha minden oldala egyenlő hosszúságú és minden szöge egyenlő nagyságú.)

**7. feladat.** Egy $n \times n$ méretű tábla $n^2$ mezejének mindegyikét feketére vagy fehérre színezzük. Jelölje $a_i$ a fehér mezők számát az $i$-edik sorban, és jelölje $b_i$ a fekete mezők számát az $i$-edik oszlopban. Határozzuk meg $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ maximális értékét a tábla összes kiszínezésére nézve.

**8. feladat.** Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valós számok végtelen sorozata úgy, hogy minden pozitív egész $n$ esetén

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n_1}^2}{n+1}}.$$

Bizonyítandó, hogy az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat konstans.

## Olimpiai előkészítő szakkörök a 2020/2021. tanévben

A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Olimpiai felkészülés az alábbiak szerint történik:

*Budapest:* az első alkalom szeptember 18-án, a második október 16-án (pénteken) lesz a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban (Budapest VIII. kerület, Horváth M. tér 8.) 14.30-tól, szakkörvezető: *Dobos Sándor.*

*Csongrád megye:* az első alkalom szeptember 17-én (csütörtökön) lesz a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében (Szeged, Aradi vértanúk tere 1.), 15.00 és 17.00 között, szakkörvezető: *Kosztolányi József.*

*Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola* veszprémi és miskolci foglalkozásai 9–12. évfolyamosok számára. Az egyes foglalkozásokra a jelentkezést a diákok egyénileg végezhetik el az Erdős Iskola honlapján: `https://erdosiskola.mik.uni-pannon.hu/`. Az idei első foglalkozások Veszprémben szeptember 25. és 27., Miskolcon október 2. és 4. között lesznek. Ha a járványhelyzet súlyosbodik, a foglalkozásokat online rendezik, amíg vissza nem térhetnek a személyes találkozáshoz.

## EGMO beszámoló

Három héttel a versenynapok előtt született meg a döntés, hogy az eredeti időpontban online tartják meg az EGMO-t. A versenyzőknek a nehéz idők ellenére is sikerült a felkészülésre koncentrálniuk, szüleik, barátaik, tanáraik is támogatták őket. A felkészítést a *Morgan Stanley Budapest* és *A Gondolkodás Öröme Alapítvány* támogatta, ezúton is köszönjük a segítségüket!

A verseny maga egészen másképp zajlott, mint a korábbi években. Mindenki a saját országában írta, a csapatvezetők által meghatározott helyen és időben, személyes vagy videó-felügyelet mellett. Emiatt a dolgozatok megírása után nem lettek rögtön publikusak a feladatsorok, hiszen lehetett olyan ország, ahol még nem írták meg a versenyt. A versenyt követően a csapatvezetők és helyetteseik javították a csapatuk dolgozatait a pontozási útmutató alapján, illetve egy erre a célra létrehozott online fórumon tudtunk kérdezni a koordinátoroktól, és itt tudtunk további megoldásokat közzétenni. Számunkra nagy különbséget jelentett, hogy nem volt arra lehetőségünk, hogy a többi csapatvezetővel beszélgessünk, így nem volt arról sem információnk, hogy a többi ország résztvevőinek hogyan sikerült az olimpia. A feladatsor ezúttal szokatlan volt, két feladat is permutációkról szólt, két másikban pedig rekurzióval adták meg a számsorozatot, és mindössze egy kombinatorika feladat került kitűzésre. A feladatsorok ezen az oldalon megtalálhatóak: `https://www.egmo.org/egmos/egmo9/`

Az idei EGMO különlegessége, hogy elfogadták Magyarország jelentkezését a 2022-es EGMO szervezésére, így *2022. április 6–12. között Egerben kerül megrendezésre az Európai Matematikai Lány Diákolimpia.*

**Fekete Panna Tímea** csapatvezető
**Kiss Melinda Flóra** csapatvezető-helyettes

### Az olimpikon lányok beszámolója

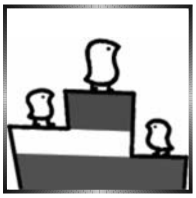
Az idei EGMO sok szempontból más volt, mint az eddigiek. A verseny Hollandiában lett volna eredetileg, azonban sajnos a járvány miatt kénytelenek voltak a szervezők online lebonyolítani a versenyt. Így nem utazhatott a csapat, amit nagyon sajnáltunk, de a kezdeti csalódottságon és nehézségeken sikerült túllépnünk a csapatvezetőink, Fekete Panna és Kiss Melinda segítségével. A versenyt megelőző tábor helyett online megbeszéléseket tartottunk, ami nagy kihívást jelentett mindnyájunknak, és kicsit a tanáraink helyében érezhettük magunkat.

Az EGMO-t nagyon szerettük volna Budapesten közösen írni, és nem otthon egyedül, mert az előző évekhez hasonlóan szerettük volna megőrizni az EGMO-hangulatot. Ennek érdekében tartottunk sok online megbeszélést, amelyek keretein belül bemutattuk egymásnak a szerencsét hozó talizmánjainkat, a szobánkat, és motiváltuk egymást ebben a nehéz helyzetben. A versenyt magát végül közösen írtuk meg a Budapesti Fazekasban. Lett volna lehetőségünk, hogy online programokon is részt vegyünk, de nem éltünk vele, mert már mindenki nagyon izgult a másnapi verseny miatt. A magyar csapat végül 2 bronz, 1 ezüst és 1 aranyéremmel „tért haza” és az országok listáján 12. (az európaiak listáján 10.) lett. Verseny után pedig néhányan elmentünk a Margitszigetre piknikezni.

Az idei diákolimpia mindenképpen más volt, mint korábban, de a csapatszellem és a pozitív hozzáállás miatt egész jó élmény lett belőle.

**Hámori Janka, Kocsis Anett, Nguyen Bich Diep** és
**Velich Nóra** olimpiai csapattagok

## Nemzetközi Nyelvészeti Diákolimpia



Indul a Nemzetközi Nyelvészeti Diákolimpia (IOL) 2020 többfordulós, internetes levelező versenye. Örülnénk, ha minél többen csatlakoznátok hozzánk. Oldjátok meg ingyenesen elérhető fordulóink feladatait!

Honlapunk címe: `http://ioling.ppke.hu/`.

A verseny próbára teszi a részt vevők logikai gondolkodását, elemzőképességét. Tedd próbára gondolkodásod egy könnyű feladattal!

### Aloha!

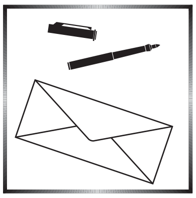
A következő feladatban hawaii nyelven olvashatók mondatok két férfi beszélgetéséből. Keanu (az egyik férfi) állításai részben beszélgetőtársára, Lopakára, részben egy harmadik férfira, Makoára vonatkoznak. A férfiak nem vér szerinti rokonok. Az aposztróf (') gégezárhangot jelöl (ʔ).)

| | A mondatok részfordításai a következők (véletlenszerű sorrendben): |
|---|---|
| 1) Ku'ulei kou makuahine. | *a*. [név] az én nővérem. |
| 2) Lei kona makuahine. | *b*. [név] a te nővéred. |
| 3) Makamae ka'u wahine. | *c*. [név] az én feleségem. |
| 4) Makamae kana keiki. | *d*. [név] a te feleséged. |
| 5) Malia kau wahine. | *e*. [név] az én gyermekem. |
| 6) Malia ko'u kaikuahine. | *f*. [név] az ő gyermeke. |
| 7) Mapuana ko'u makuahine. | *g*. [név] az én édesanyám. |
| 8) Moana kou kaikuahine. | *h*. [név] a te édesanyád. |
| 9) U'ilani ka'u keiki. | *i*. [név] az ő édesanyja. |

1. Fordítsuk le a hawaii mondatokat magyarra, majd rajzoljuk le a családfát.

2. Milyen különbség figyelhető meg a kana, kau, ka'u, kona, kou, ko'u szavak használatában?

A feladatot készítette: *Ugrin Bálint József*



## Monoton leképezések fixpontjai II.

A fraktálokat szokás leképezéscsaládok invariáns halmazainak tekinteni. Hutchinson nevezetes fraktáltétele is ezt veszi alapul, mivel ez az értelmezés kaput nyit a fixponttételek módszerei előtt. Célunk Hutchinson eredeti megközelítésének egyszerűsített formában történő bemutatása. Az egyszerűsítést a Knaster–Tarski-féle fixponttétel élesített változata biztosítja.

### 1. Bevezetés

A *fraktál* mindannyiunk számára jól ismert kifejezés. Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a fraktálok mindenütt jelen vannak [2], hiszen találkozhatunk velük fizikai, kémiai, biológiai folyamatokban, sőt a művészetben vagy a természetben is. Eközben magát a pontos definíciót a titokzatosság homálya övezi, részben azért, mert a matematikai szakirodalomban sincs egységes, mindenki által elfogadott fraktálfogalom. Vannak, akik a törtdimenziós halmazokat tekintik fraktálnak. Maga az elnevezés a latin 'fragmentus', azaz „töredezett" szóból ered, és Mandelbrot, a fraktálok atyja szintén ezt a definíciót használta [8].

Egy másik elterjedt értelmezés az önhasonlóság tulajdonságából indul ki. Tekintsük például a jól ismert Cantor-halmazt. Ehhez úgy jutunk, hogy a $[0,1]$ intervallum középső nyílt harmadát eltávolítjuk, majd a keletkező két intervallum

A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-2 és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

középső nyílt harmadát hagyjuk el. Ezt az eljárást ismételjük, minden lépésben a meglévő zárt intervallumok középső nyílt harmadát törölve:

Végezetül, az egyes lépésekben kapott halmazok közös részét véve, kapjuk a Cantor-halmazt. Megmutatható, hogy e közös rész nem üres, sőt kontinuum számosságú.

Azonnal látható, hogy a Cantor-halmaz önhasonló, hiszen a harmadára zsugorított képe és ennek 2/3-dal vett eltoltja visszaadja az eredeti halmazt. Másképpen fogalmazva, a Cantor-halmaz eleget tesz az alábbi invariancia egyenletnek:

$$C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right). \tag{1}$$

Természetesen az üres halmaz vagy a valós számok halmaza is teljesíti ezt az invarianciát. Azonban a Cantor-halmaz az *egyetlen* olyan nem üres megoldás, amely korlátos és zárt. (Egy valós részhalmaz *zárt,* ha a komplementer minden pontja egy, a pontot tartalmazó nyílt intervallummal együtt tartozik a komplementerhez.)

A Cantor-halmaz önhasonlósági tulajdonságát szem előtt tartva, bevezethetjük az invariancia absztrakt fogalmát. Legyen $\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ az $X$ nem üres halmazt önmagába képző függvények halmaza, s legyen $A_0 \subseteq X$. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq X$ halmaz *$\mathscr{F}$-invariáns,* ha kielégíti a $H = F(H)$ egyenletet, ahol az $F$ *invariancia operátor* az alábbi módon adott:

$$F(H) = \bigcup_{k=1}^{m} f_k(H) := f_1(H) \cup \ldots \cup f_m(H) \cup A_0. \tag{2}$$

Itt a $H$ halmaz $f : X \to X$ függvény általi képét a szokásos $f(H) := \big\{f(x) \mid x \in H\big\}$ módon értelmezzük. Nyilvánvaló, hogy a Cantor-halmaz $\mathscr{F}$-invariáns halmaz, ha az $\mathscr{F}$ család a korábban látott két zsugorítást tartalmazza, és $A_0 = \emptyset$.

Tegyük fel, hogy az alaptér a valós számok halmaza, vagy az euklideszi sík, vagy az euklideszi tér, és tekintsünk ezen egy véges $\mathscr{F}$ függvénycsaládot. Azt mondjuk, hogy egy $H$ részhalmaz *$\mathscr{F}$-fraktál,* ha nem üres, korlátos, zárt, és $\mathscr{F}$-invariáns. Egy alaptérbeli halmaz zártságát továbbra is úgy értelmezzük, hogy a komplementer minden pontja egy, a pontot tartalmazó nyílt intervallummal vagy nyílt körlemezzel vagy nyílt gömbbel együtt tartozik a komplementerhez. A bevezető példához fűzött megjegyzést ezek szerint úgy is fogalmazhatjuk, hogy a Cantor-halmaz az egyetlen fraktál, amely az (1) egyenletet teljesíti.

A fraktálelmélet alaptétele, Hutchinson híres eredménye [5] valójában a fraktálok egyértelmű létezésére vonatkozó egyszerű elegendő feltétel: *Kicsinyítések bármely véges $\mathscr{F}$ családja meghatároz pontosan egy $\mathscr{F}$-fraktált.* Megjegyezzük, hogy

Hutchinson tétele ennél jóval általánosabb formában érvényes, de olyan fogalmakra támaszkodik, melyek messze túlmutatnak cikkünk keretein. Azonban még ebből az egyszerűsített változatból is könnyen levezethető a Cantor-halmaz fraktál tulajdonsága. Hutchinson bizonyítása a fixponttételek módszerén alapul. A $H = F(H)$ invariancia egyenlet egyértelmű fraktál megoldásának létezése azzal egyenértékű, hogy az $F$ leképezésnek létezik egyértelmű fixpontja a nem üres, korlátos, zárt halmazok körében. Ehhez számos mély analízisbeli eszköz szükséges, például Banach híres fixponttétele [1]. A kontrakciós elvként közismert eredmény nemcsak a létezés és egyértelműség kérdését válaszolja meg, hanem iterációs eljárást is ad a fraktál tetszőleges pontosságú közelítésére.

Ha a fraktálelmélet alaptételét a megfogalmazás szintjén sem tudjuk hűen tolmácsolni, akkor természetesen a bizonyítás ismertetéséről is le kell mondanunk a szükséges elméleti háttér hiányában. Mégis föltett szándékunk, hogy Hutchinson művészi értékű megközelítéséből legalább egy kis ízelítőt adunk. A merész vállalkozáshoz szintén a **P. 329.** jelű pontversenyen kívüli probléma, a Knaster–Tarski-féle fixponttétel [7] nyújt kapaszkodót. A Banach-féle fixponttételt ezzel helyettesítve kiderül, hogy az (2) egyenletnek *létezik* megoldása. Az egyértelműség helyett csupán egy gyengébb állítást tudunk megmutatni, nevezetesen, hogy a megoldások között van egy *legszűkebb* megoldás. Végezetül, a Banach-féle iterációt a Kantorovicsfélével [6] kicserélve, *eljárás* nyerhető a legszűkebb megoldás előállítására. Jelen cikk a [3] dolgozat egyszerűsített változata.

## 2. Leképezéscsaládok invariáns halmazai

Ahogy azt korábbi cikkünkben láttuk [4], a Knaster–Tarski-féle fixponttétel szerint *minden monoton leképezésnek létezik fixpontja.* Elsőként ennek az állításnak egy élesítését igazoljuk. Fölidézzük, hogy egy leképezés *monoton,* ha megőrzi a halmazelméleti tartalmazást. A továbbiakban $\mathscr{P}(X)$ jelöli az $X$ részhalmazainak családját.

**Tétel.** *Bármely monoton leképezésnek létezik legszűkebb fixpontja.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $F : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ egy monoton leképezés. Emlékeztetünk arra, hogy a Knaster–Tarski fixponttételhez az előző cikkünkben közölt bizonyításban a

$$H_0 = \bigcap \bigl\{ H \subseteq X \mid F(H) \subseteq H \bigr\}$$

halmaz fixpont tulajdonságát igazoltuk. Ha most $H$ tetszőleges fixpont, akkor $F(H) \subseteq H$ szintén fönnáll. Így $H_0 \subseteq H$ a fenti definíció értelmében. Azaz, $H_0$ minden más fixpontnak része, ami pontosan a kívánt állítást adja. $\square$

A továbbiakban a (2) invariancia operátor néhány egyszerű, de hasznos tulajdonságát foglaljuk össze. Nyilvánvaló, hogy $A \subseteq B$ esetén $f(A) \subseteq f(B)$ is fönnáll, ha $f$ tetszőleges függvény. Innen láthatjuk, hogy *az invariancia operátor monoton.* Könnyen ellenőrizhető az is, hogy bármely $f$ függvény esetén

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy *az invariancia operátor fölcserélhető a halmazelméleti egyesítés műveletével.* Használni fogjuk még az invariancia operátor *iteratív hatványait,* melyeket rekurzióval értelmezünk: $F^1(H) := F(H)$, továbbá $F^{n+1}(H) := F\big(F^n(H)\big)$, ahol $H \subseteq X$ tetszőleges. A pozitív egész számok halmazára az $\mathbb{N}$ jelölést alkalmazzuk.

Fő eredményünk a Hutchinson-féle alaptétel „struktúramentes” megfelelője. A fraktálok geometriai tulajdonságai (korlátosság és zártság) sajnos nem igazolhatók a rendelkezésünkre álló eszközökkel. Cserében az alkalmazott módszerek nem lépik túl a naiv halmazelmélet kereteit, miközben hűen tükrözik Hutchinson fixpontos szemléletű megközelítését.

**Tétel.** *Ha $\mathscr{F}$ véges függvénycsalád egy nem üres halmazon, akkor létezik legszűkebb $\mathscr{F}$-invariáns halmaz, amely az alábbi alakban állítható elő:*

$$L_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(\emptyset). \tag{3}$$

**Bizonyítás.** Legyen $\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ adott függvénycsalád az $X$ nem üres halmazon. Mivel az invariancia operátor monoton, ezért létezik legszűkebb $H_0$ fixpontja. A monotonitás és a nyilvánvaló $\emptyset \subseteq H_0$ tartalmazás miatt $F(\emptyset) \subseteq F(H_0) = H_0$ következik, hiszen $H_0$ fixpont. Ezt a gondolatmenetet teljes indukcióval kombinálva kapjuk, hogy $F^n(\emptyset) \subseteq H_0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül. Így,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(\emptyset) \subseteq H_0,$$

azaz $L_0 \subseteq H_0$ adódik. Most azt igazoljuk, hogy $L_0$ fixpontja az invariancia operátornak. Ezúttal a $\emptyset \subseteq F(\emptyset)$ tartalmazásból kiindulva de az előbbi gondolatmenetet használva kapjuk, hogy $F^n(\emptyset) \subseteq F^{n+1}(\emptyset)$ ha $n \in \mathbb{N}$. Vagyis, $\big\{F^n(\emptyset) \mid n \in \mathbb{N}\big\}$ egy bővülő halmazcsalád. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $L_n = F^n(\emptyset)$ jelölést. Az egyesítés függvényhatással való kapcsolatát és az egyesítés felcserélhetőségi tulajdonságát szem előtt tartva,

$$\begin{aligned} F\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(\emptyset)\Bigg) &= \bigcup_{k=1}^{m} f_k\Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n\Bigg) = \bigcup_{k=1}^{m}\,\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_k(L_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\,\bigcup_{k=1}^{m} f_k(L_n) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(L_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F\big(F^n(\emptyset)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{n+1}(\emptyset) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(\emptyset). \end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben azért lehetséges a kitevő csökkentése, mert bővülő halmazrendszert egyesítünk. Megállapíthatjuk tehát, hogy $F(L_0) = L_0$, ami pontosan a kívánt fixpont tulajdonság. Azonban $H_0$ a legszűkebb fixpont, ezért $H_0 \subseteq L_0$. Mivel korábban a fordított irányú tartalmazást már beláttuk, ezért összességében $H_0 = L_0$ adódik. □

Példaként tekintsük a

$$H = \frac{1}{10}H \cup \left(\frac{1}{10}H + \frac{9}{10}\right) \cup \{0\}$$

invariancia egyenletet. A fönti tétel értelmében ennek létezik legszűkebb megoldása, melyet a (3) alakban állíthatunk elő. Hogyan kaphatjuk meg ezt az előállítást? Elsőként teljes indukcióval azt igazoljuk, hogy

$$F^{n+1}(\emptyset) = \big\{0{,}x_1 \dots x_n \mid x_k \in \{0;9\},\ k = 1, \dots, n\big\}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén. Azonnal láthatjuk, hogy $F(\emptyset) = \{0\}$, vagyis az állítás igaz, ha $n = 0$. Tegyük fel, hogy $F^{n+1}(\emptyset)$ a fenti alakban adott. Ennek minden elemét 10-zel osztva majd 0-val és 9/10-del eltolva kapjuk $F^{n+2}(\emptyset)$ elemeit. Ha tehát egy $0{,}x_1 \dots x_n$ alakú elemből indulunk ki, akkor ez az eljárás egy $0{,}0x_1 \dots x_n$ és egy $0{,}9x_1 \dots x_n$ elemet eredményez. Vagyis, $F^{n+2}(\emptyset)$ olyan $(n+1)$ hosszúságú tizedes törteket tartalmaz, melyek 0 vagy 9 számjegyekből állnak. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. Ebből azonnal kapjuk, hogy a keresett egyesítési halmaz, vagyis a legszűkebb fixpont

$$H_0 = \big\{0{,}x_1 \dots x_n \mid x_k \in \{0;9\},\ k = 1, \dots, n;\ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy a $H_0$ legszűkebb invariáns halmaz nem üres, és megszámlálhatóan végtelen számosságú.

A Cantor-halmazt definiáló egyenlet nagyfokú hasonlóságot mutat a példabeli invarianciaegyenlettel. Az eredeti formában ennek az üres halmaz a legszűkebb megoldása. Ha azonban (1) jobb oldalát egyesítjük a $\{0\}$ halmazzal, az üres halmaz már nem megoldás, miközben a most bemutatott módszer ugyanígy alkalmazható. Végeredményképpen a Cantor-halmaz egy valódi, megszámlálhatóan végtelen részhalmazát kapjuk. Mivel ezt a legszűkebb invariáns halmazt triadikus törtek írják le, melyek tárgyalása nem célunk, ezért választottuk inkább a fönti példát.

A fixponttételek elmélete nem csupán a fraktálelméletben jut kulcsszerephez. Számos meglepő alkalmazásával találkozhatunk a klasszikus és modern analízisben, a geometriában, sőt a játékelméletben vagy az algebrában. A téma iránt érdeklődőknek ajánljuk Shapiro könyvét [9].

## Hivatkozások


[1] S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques,* Fund. Math., **6** (1924), 236–239.

[2] M. Barnsley, *Fractals everywhere,* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[3] M. Bessenyei and E. Pénzes, *Fractals for minimalists,* Aequat. Math., **94** (2020), no. 3, 595–603.

[4] Bessenyei M. és Pénzes E.: *Monoton leképezések fixpontjai I.,* KöMaL, **73** (2020), 141–146.

[5] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity,* Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), 713–747.

[6] L. Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations,* Acta Math., **71** (1939), 63–97.

[7] B. Knaster and A. Tarski, *Un théoreme sur lesfonctions d'ensembles,* Ann. Soc. Polon. Math., **6** (1927), 133–134.

[8] B. Mandelbrot, *Les objets fractals,* Flammarion, Editeur, Paris, 1975, Forme, hasard et dimension, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.

[9] J. H. Shapiro, *A fixed-point farrago,* Universitext, Springer, 2016.

**Bessenyei Mihály** és **Pénzes Evelin**
Debrecen

## Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

### I. rész

**1.** *a*) Adott két függvény:

$$f(x)=\frac{2x+9}{3};\qquad g(x)=\sqrt{x^2+4x+4}\,.$$

Van-e olyan $x\in\mathbb{R}$, ahol a két függvény helyettesítési értéke megegyezik? (*6 pont*)

*b*) Van-e olyan $p$ valós szám, amelyre az alábbi két kifejezés értéke egyenlő:

$$A=\log_2(p+2)+\log_2(p-2);\qquad B=1+\log_2(p+10)?\qquad (6\ pont)$$

**2.** Solymász tanár úr biológia órájára 26 végzős jár, és valamennyien részt vesznek imádott biológia tanáruk humánetológia óráján is. Félévkor a tanár úr (nevelő célzattal) meglehetősen szigorú volt, ezért 21-en nem kaptak ötöst biológiából és 19-en nem kaptak ötöst humánetológiából. Ugyanakkor 8-an kaptak ötöst legalább az egyik tárgyból.

*a*) Hány végzős kapott ötöst mindkét tárgyból? (*4 pont*)

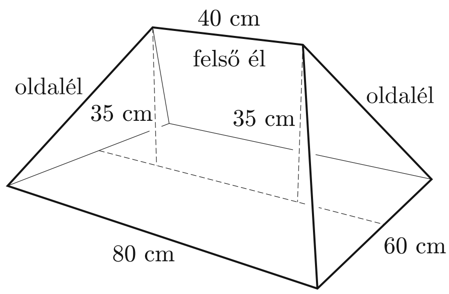
A biológia próbaérettségit mind a 26 diák megírta. A tanár úr korábbi szigorúsága elérte célját, mert a próbaérettségi már sokkal jobban sikerült. Senki sem kapott elégtelen, vagy elégséges osztályzatot. A közepes, jó és jeles osztályzatok száma ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme lett. A csoport átlaga $\frac{60}{13}$ lett.

*b*) Számoljuk ki a próbaérettségi osztályzatainak szórását. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (*8 pont*)

**3.** *a*) Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2-24x+2$ függvény lokális maximumhelyét. (*5 pont*)

*b*) Mekkora területet zár be a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^2-6x-24$ függvény grafikonja és az $x$ tengely? (*6 pont*)

*c*) Mennyi az $a_n=\frac{11n-5}{3n+8}$ sorozat határértéke? (*3 pont*)




**4.** Peti bá' egy téglalap alapú babaházat készített a lányainak. A téglalap oldalai 60 cm és 80 cm. A babaházra egy levehető „sátortetőt" készített. A tető felső éle 40 cm hosszú, és a babaház téglalap alakú mennyezetének hosszabbik középvonala felett, attól 35 cm távolságra van. A tető oldalélei egyenlő hosszúak.

*a*) Számítsuk ki az oldalélek hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket. (*7 pont*)

Zsófi a tető, trapéz alakú részére egy téglalap alakú díszt szeretne felragasztani. A téglalap egyik oldala illeszkedik a trapéz alapvonalára, két csúcsa pedig a trapéz száraira.

*b*) Mekkora a legnagyobb területű téglalap területe, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? A választ négyzetcentiméterben, egész számra kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

### II. rész

**5.** A DÖ 900 pólót rendelt E5vös Napra. A pólókat két géppel nyomtatták. A gépeket kezdetben rosszul állították be, ezért az első gép (Horribile dictu!) a rajta nyomtatott 400 póló 2%-ára tévesen, az E5vös helyett az Eötvös feliratot nyomtatta, és a másik gép ugyanezt a hibát követte el a rajta nyomtatott pólók 3,4%-ával. A minőségellenőrzéskor Bocó a 900 alaposan összekevert pólóból véletlenszerűen kiválasztott egyet, és azon hibás volt a felirat. (Ezen persze kellőképpen elkeseredett …)

*a*) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás pólót a második gépen nyomtatták? (*5 pont*)

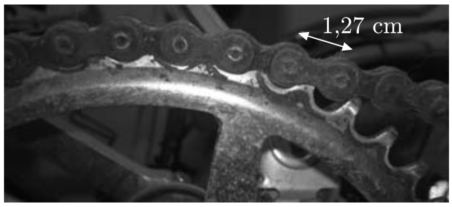
A DÖ úgy döntött, hogy a hibásan nyomtatott póló árából először 500 Ft árengedményt ad, de a kereslet nagyon minimális volt, ezért az új árat még tovább kellett csökkenteni, annak $p$%-ával. Így a póló 50 Ft-tal drágább lett, mintha először engedték volna le az árát $p$%-kal és utána 500 Ft-tal, viszont 90 Ft-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer az aktuális ár $p$%-ával csökkentették volna az árát.

*b*) Mennyi volt a póló eredeti ára, és hány százalékos volt a csökkentés? (*11 pont*)

**6.** Fixi kerékpárunkon az első lánctányéron 46 fog található, a hátsó fogaskeréken pedig 18 fog van. (Az első lánctányérhoz rögzítik a pedált, a hátsó fogaskerék pedig a hátsó keréken van.) Az *1. ábrán* a lánc felülnézeti képe látható, a második ábrán pedig az, hogy miként illeszkedik a lánc a fogaskerékre. Két láncszem tengelye 1,27 cm távolságra van egymástól (lásd *2. ábra*).

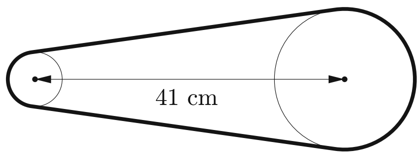
*a*) Milyen hosszú lánc férne az első lánctányérra, ha teljesen körbetekernénk lánccal? (*3 pont*)

*1. ábra*




*2. ábra*

A két fogaskerék (a pedál és a hátsó tengely) középpontja 41 cm van egymástól (*3. ábra*) és a lánc teljesen feszes.




*3. ábra*

*b*) Milyen hosszú lánc van a kerékpáron? (Válaszunkat centiméterben, két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.) (*10 pont*)

A láncokat gyártó üzemben 160 láncszemből álló láncdarabokat készítenek. A mérések alapján a láncdarabok 2%-ában egy szemmel kevesebb van, mint az előírás. A láncszemek számát egy számítógép ellenőrzi egy futószalagon. A futószalag különböző pontjain véletlenszerűen kiválaszt egy láncdarabot és meghatározza, hány láncszemből áll, de a futószalag folyamatosan mozog, ezért nem lehet kiemelni a hibás láncdarabot. Ennek megfelelően akár az az extrém eset is előfordulhat, hogy ugyanazt a láncdarabot ellenőrzi csak, akár többször is. Egy félórás időintervallumban 5000 láncdarab kering a futószalagon.

*c*) Határozzuk meg a fél óra alatt hibásnak talált láncdarabok várható értékét. (*3 pont*)

**7.** Ábel elkésett a matematika óráról. Amikor tanára kérdőre vonta, a következőképpen mentegetőzött: „Tanár úr! Fáj a lábam, ezért nem tudtam lépcsőn feljönni a harmadik emeletre. Lifttel kellett jönnöm, de a liftre ki van írva, hogy 13 fő használhatja, és sokáig tartott, amíg összejött a 13 ember." (Ezzel persze kitűnő lehetőséget biztosított matematika tanárának, hogy elmagyarázza a „legfeljebb" és „legalább" szavak matematikai lényegét ...)

Az E5vös Napokon az Igazgató Úr úgy döntött, hogy a tizenkettedikesek szabadon használhatják a liftet. A végzősök úgy gondolták, hogy ezt a lehetőséget maximálisan kihasználják, ezért minden esetben 13-an szálltak be az üres liftbe.

*a*) Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen alkalommal biztosan utazott a liftben legalább három olyan diák, akik osztálytársak voltak. (Az iskolában hat végzős osztály van.) (*3 pont*)

Az E5vös Napokon a Ki Mit Tud?-ra 12 fős diákzsűri is alakult, amelyet a végzős évfolyamból véletlenszerűen választottak ki.

*b*) Mekkora a valószínűsége annak, hogy minden osztályt pontosan két fő képviselt, ha az osztálylétszámok: 12.A: 32 fő, 12.B: 33 fő, 12.C: 31 fő, 12.D: 30 fő, 12.E: 29 fő, 12.F: 28 fő? (*6 pont*)

A streetball döntője után a hat résztvevő kezet fogott egymással. Mivel a meccs kissé elfajult, ezért voltak, akik nem fogtak kezet. Flóra megkérdezte a résztvevőket, hogy hány emberrel fogtak kezet, és a következő válaszokat kapta: 5; 4; 3; 3; 2; 2. Flóra ezek után a következőt mondta: „Biztos, hogy van közöttetek legalább egy ember, aki nem tud számolni."

*c*) Mire alapozta állítását? (*3 pont*)

Az E5vös Napok végén Főző úr, a technikus visszapakolta a kiadott eszközöket kis kuckójába. Lelkes segítői is akadtak, akik a kuckó elé odapakoltak két létrát, három fekete dobozt, négy projektort és öt vetítővásznat, meglehetősen nagy összevisszaságban. Főző úr, ezeket véletlenszerű sorrendben, egyesével bepakolta a helyére.

*d*) Hányféle módon történhetett ez, ha az azonos típusú eszközöket nem lehet megkülönböztetni egymástól? (*4 pont*)

**8.** Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi ponthalmazokat:

*a*) $A:=\big\{P(x;y)\mid 9x^2-16y^2\geqslant 0\big\}$. (*5 pont*)

*b*) $B:=\big\{Q(x;y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\big\}$. (*3 pont*)

*c*) Mekkora az $A\cap B$ halmaz területe? (*8 pont*)

**9.** Egy piramisjáték elindítója az első héten öt embert szervezett be. A szervezés jól folytatódott, ezért a második héttől kezdődően a hetente beszervezettek száma a következő sorozat szerint alakult:

$$a_n=3\cdot a_{n-1}-8.$$

*a*) Összesen hányan vettek már részt az ötödik héten a játékban? (*3 pont*)

*b*) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei periodikusan ismétlődő sorozatot alkotnak. (*5 pont*)

*c*) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat $n$-edik eleme a másodiktól kezdve: $a_n = 3^{n-1}+4$. (*8 pont*)

**Balga Attila, Székely Péter**
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium

## Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2020–2021-es tanévre (2020 szeptemberétől 2021 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 6-nál nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

*Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.*

*A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at:* `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonkénti ára 950 Ft.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2020–2021-es tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

## Versenykiírás* a KöMaL 2020–2021. évi pontversenyeire

A most induló pontversenyek 2020 szeptemberétől 2021 májusáig tartanak, havonta az újonnan kitűzött feladatcsoportok megoldásait lehet beküldeni.

**Kedves Versenyzőnk!**

Matematikából, fizikából és informatikából összesen 21 kategóriában indítunk különféle nehézségű pontversenyeket. Ezek a versenyek 9 hónapon keresztül, 2020 szeptemberétől 2021. június elejéig tartanak. Minden hónapban új feladatokat tűzünk ki, és a megoldásokat a következő hónap elejéig küldheted be. A verseny végeredményét 2021. szeptemberi számunkban hirdetjük ki. A díjakat jövő ősszel, a KöMaL Ifjúsági Ankéton adjuk át.

Pontversenyeinkben a részvétel a 2020/2021-es tanévben is térítésmentes. Kérjük azonban versenyzőink szüleit, hozzátartozóit, vagy az őket támogató intézményeket, cégeket, hogy előfizetésükkel és adományaikkal segítsék Lapunk fennmaradását.

### Nevezés a versenyre

Versenyeinkben minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló részt vehet.

Az Európai Unió Általános Adatvédelmi Rendelete (GDPR) értelmében szülői engedély szükséges a 16 évesnél fiatalabb versenyzőink adatainak nyilvántartásához. Az ő esetükben egy szülői nyilatkozatra is szükség van, melyet a regisztráció során lehet megadni. Amennyiben a szülői nyilatkozat nem érkezik meg, a versenyző nem szerepelhet az eredménylistában. Adatkezelési szabályzatunk a `https://www.komal.hu/info/adatkezeles.h.shtml` címen olvasható.

**Regisztráció**

Ha még soha nem vettél részt a KöMaL versenyeiben, az első lépés a *regisztráció a honlapunkon* (`https://www.komal.hu/u?a=reg`). A regisztráció során alapvető adatokat (név, születési dátum, iskola, osztály, e-mail cím) kérünk. A későbbi bejelentkezéshez szükséges jelszavadat e-mailben küldjük el.

A nagyon gyakori családnevű versenyzőknek (Horváth, Kiss, Varga stb.) javasoljuk, hogy válasszanak egy háromjegyű jelzőszámot, amit második vezetéknévként használnak (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük, hogy mind a regisztrációkor, mind pedig a tanév során beküldött dolgozataidon is minden esetben az így kibővített nevet használd.

*Kérjük, hogy azok is figyelmesen olvassák el a versenykiírást, akik tavaly már részt vettek valamelyik versenyünkben.

A sikeres regisztráció után adhatod meg további adataidat (pl. levelezési cím: ide szoktuk küldeni az érettségizettek oklevelét; felkészítő tanárok neve), és nyilatkozhatsz a részletes pontszámok nyilvánosságáról vagy egyes konkrét versenyekben való részvételről.

Ha korábban már regisztráltál, akkor nincs szükség újabb regisztrációra; a tavalyi jelszavadat továbbra is használhatod; ugyanakkor szükséges lesz a személyes beállításaid áttekintése, felülvizsgálata.

Az egyes pontversenyekre az első dolgozat beküldésével nevezhetsz be.

A versenyekbe a tanév során később is be lehet kapcsolódni.

**FONTOS! A versenyben csak a regisztráció után, a Munkafüzetbe beírt vagy feltöltött megoldásokat értékeljük! A regisztráció nélkül, postán beküldött megoldásokat utólag sem vesszük figyelembe!**

**Az osztályok számozása**

A KöMaL versenyeiben az osztályokat 1-től 12-ig számozzuk. Lehet, hogy a számozás nem azonos az iskolában használt számmal. Azok számítanak 12. osztályosnak, akik most kezdik az érettségi vizsga előtti utolsó évet. 11. és 10. osztályosnak számítanak azok, akik várhatóan 2022-ben, illetve 2023-ban fejezik be a középiskolát.

Azok, akik $8+5$ éves képzésben vesznek részt, például a nyelvi előkészítő osztályok tanulói, két egymás utáni évben is 9. osztályosnak számítanak. Kérjük, ha az osztályod sorszáma nem 1-gyel nőtt tavalyhoz képest, ezt jelezd a szerkesztőségnek e-mailben.

**A regisztráció módosítása**

A regisztráció után az azonosításhoz szükséges adataidat (név, iskola, osztály, e-mail cím) önállóan nem módosíthatod. Ha ezek megváltoztak, kérjük, hogy fordulj e-mailben a szerkesztőséghez.

Mindenkit óvunk a regisztráció önkényes megismétlésétől, a többszörös regisztrációtól. Nincs olyan helyzet, amikor a többszörös regisztráció segítene; csak még nagyobb zavart okoz. (Ugye nem szeretnél kétszer szerepelni a pontversenyben, feleakkora pontszámmal?)

**Arcképek**

Ha szeretnéd, hogy fényképed megjelenjen honlapunkon a pontverseny eredményében, küldd el a szerkesztőségnek e-mailben. Ha lehet, válassz világos, egyszínű hátteret. A képeket többnyire átméretezzük és megfelelő méretűre vágjuk, ezért érdemes nagyobb felbontást használni.

## Matematika versenyek

Négyféle versenyt indítunk, növekvő nehézségi sorrendben **K**, **C**, **B** és **A** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de K-ban és B-ben egyszerre nem. Ha kilencedik osztályos vagy, akkor a személyes beállításaid között nyilatkozhatsz, hogy melyik versenyben szeretnél részt venni.

Mindegyik versenyünkre érvényes, hogy **egy feladatra csak egy megoldást értékelünk.**

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük.

**K**-*jelű matematika feladatok* – az ABACUS és a KöMaL Közös pontversenye Kilencedikes Kezdőknek

A K-pontversenyben csak kilencedik osztályosok indulhatnak. Azoknak ajánljuk, akik még csak most ismerkednek a KöMaL-lal. Szeptembertől márciusig hét fordulóban, havonta öt feladat jelenik meg; ezek közül három feladat az ABACUS pontversenyével közös. Mindegyik feladat teljes megoldása 6 pontot ér. A feladatokat az *ABACUS matematikai lapok* bocsátja a KöMaL rendelkezésére.

Az ABACUS pontversenyében továbbra is az általános iskolák 3–8. osztályos tanulói vehetnek részt.

**C**-*jelű matematika gyakorlatok*

A C-pontverseny gyakorlatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a B és az A kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat, azok találhatnak itt kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein, vagy emelt szintű érettségit kívánnak tenni matematikából.

A gyakorlatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más részük azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–12. évfolyamosok küldhetnek be megoldást. Minden dolgozatra legfeljebb 5 pont kapható.

A C-pontversenyt három korcsoportban értékeljük: 1–8., 9–10., illetve 11–12. osztályosok.

**B**-*jelű matematika feladatok*

A B-pontversenyben havonta összesen nyolc feladatot tűzünk ki, de havonta mindenkinek **legfeljebb hat** megoldását számítjuk be a pontversenybe (amelybe azonban először a nem versenyszerűeket számítjuk be, lásd lejjebb). Az eredményes versenyzéshez tehát nincs szükség valamennyi feladat megoldására; ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot.

A B-feladatok sorrendje megfelel az iskolai tananyagnak: egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak. A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (többnyire 3–6).

A B-pontverseny eredményét öt korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11., illetve 12. évfolyamokban.

**A**-*jelű nehezebb matematika feladatok*

Az A-pontverseny a legfelkészültebb diákok számára jelent kihívást. Azoknak ajánljuk, akik tudományos kutató pályára vagy nemzetközi versenyekre készülnek.

Havonta két vagy három A-feladatot tűzünk ki, mindegyik feladatra legfeljebb 7 pont kapható. Az A-verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek.

## Fizika versenyek

Háromféle fizika versenyt indítunk: **M**, **G** és **P** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de a G- és a P-pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. A legfeljebb 10. osztályosoknak honlapunkon, a személyes beállításaik között kell nyilatkozniuk, hogy a P- és G-versenyek közül melyikben kívánnak részt venni.

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük.

**M**-*pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta egy mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6-6 pontot lehet szerezni.

A mérés elvégzéséhez szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A segítő személy adatait a mérési jegyzőkönyv elején a versenyző adatai mellett tüntessétek fel. Ebben a pontversenyben azt is megengedjük, hogy a mérést két versenyző közösen, mérőpárban végezze el. A mérőpár tagjai – akik járhatnak különböző iskolába és különböző évfolyamokba – egymástól függetlenül nevezzenek be az **M**-pontversenybe. A mérési jegyzőkönyvet a mérőpár mindkét tagja a saját nevénél töltse fel a munkafüzetbe, és a fejlécen minden hónapban szerepeljen mindkettőjük neve, iskolája, osztálya, e-mail címe. A mérési jegyzőkönyvért járó pontszámot a mérőpár mindkét tagja külön-külön megkapja.

**G**-*jelű fizika gyakorlatok*

A G-pontversenyben legfeljebb 10. osztályosok vehetnek részt. Azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a P-feladatokat. Többnyire az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat találnak a versenyzők, így azok is eséllyel indulhatnak, akik még nem rendelkeznek feladatmegoldó rutinnal, de a gyakorlatok megoldásával és beküldésével felkészülhetnek arra, hogy a következő években eredményesen szerepelhessenek a P-pontversenyben.

Minden hónapban négy G-gyakorlatot tűzünk ki, az elérhető pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött gyakorlatok közül, de **havonta legfeljebb három** feladat megoldását (először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe. A G-pontversenyt három kategóriában (legfeljebb 8. évfolyam, 9., 10. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük.

**P**-*jelű fizika feladatok*

Havonta kb. tíz elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. **Az 1–8. évfolyamosoknak havonta legfeljebb három, a 9–12. évfolyamosoknak legfeljebb öt megoldását** számítjuk be a pontversenybe (azonban először a nem versenyszerűeket).

Az elméleti versenyt korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük.

## Informatika versenyek

**I**-*pontverseny* – informatika alkalmazási és programozási feladatok

Havonta három **I** jelű és egy **I/S** jelű feladatot tűzünk ki. A feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a középiskolai tanulmányokra támaszkodik. Alapvető célunk, hogy e feladatok segítsék a felkészülést az informatika versenyekre és az emelt szintű érettségire. Minden hónapban a négy kitűzött feladatból a három legmagasabb pontszámot elért feladat pontszámát számítjuk be az I-pontversenybe.

Az I jelű feladatok programozási és informatika alkalmazói feladatok. A feladatok egyike jellegében és formájában is lényegében megegyezik az érettségin kitűzött feladatokkal, ezt az (É) betűvel jelezzük a feladat sorszáma mellett. Versenyzőink ezen feladatok megoldásával a vizsgára való felkészülést is gyakorolhatják.

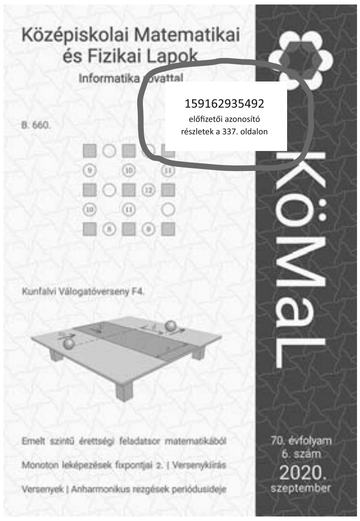
Az I/S jelű feladatok az I jelű programozási feladatoknál nehezebb, de az S jelűeknél könnyebb programozási feladatok. A megoldáshoz szükséges ismeretek és algoritmusok megtalálhatók a `http://tehetseg.inf.elte.hu/nemes` és a `https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2020_2021_vk/116_informatika_2021.pdf` oldalakon.

**S**-*pontverseny* – nehezebb programozási feladatok

Az **S**-pontverseny egy **S** jelű nehezebb programozási feladatból és az I-pontversenyben is résztvevő **I/S** feladatból áll. Mindkét feladat a programozási versenyekre való felkészülést szolgálja. A megoldáshoz szükséges ismeretek és ajánlott algoritmusok körét a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiákon alkalmazott angol nyelvű leírás (IOI Syllabus) tartalmazza, lásd `https://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/`. Az S és I/S feladatok értékelésénél az eredmény helyességén kívül azt is figyelembe vesszük, hogy az algoritmusok mennyire hatékonyak, nagyméretű bemenő adatok esetén is lefutnak-e a megadott időkorláton belül.

### A feladatok megjelenése

Új feladatokat havonta, szeptembertől májusig tűzünk ki. A feladatokat megtalálod nyomtatott számunkban és honlapunkon.




Honlapunkon a feladatokat, szeptember kivételével, az adott hónap 28. napján hozzuk nyilvánosságra. Előfizetőink azonban az adott típusú feladat beküldési határidejét követő naptól elérhetik a következő havi feladatok szövegét, és elkezdhetik a munkát. Amennyiben előfizettél a KöMaL-ra, a személyes beállításaid között add meg előfizetői kódodat. Az előfizetői azonosítót megtalálod a szeptemberi szám címlapjára ráragasztott címkén.

Azok az előfizetőink, akik (például életkoruknál fogva) nem versenyzőink, regisztráció és az előfizetői kód megadása után, a versenyzőkkel együtt szintén elérhetik a feladatok szövegét.

Egy előfizetői kódot csak egy személy használhat.

### A dolgozatok tartalma

Kérjük, tanulmányozd a korábbi számainkban és honlapunkon megjelent megoldásokat, ezek sokat segíthetnek annak megértésében, hogy milyen formát és részletességet várunk el a beküldött megoldásoktól.

**Matematika és fizika elméleti megoldások**

A megoldás leírása azt jelenti, hogy az olvasót végigvezeted a megoldásod lépésein. Törekedj a rövid, olvasható leírásra. Próbáld még egyszer átgondolni a lépések sorrendjét, és lerövidíteni a megoldást. A gondos leírás sok időt igényel; ne hagyd az utolsó pillanatra.

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár; puszta eredményközlésért nem adunk pontot. A kimondott állításokat igazolni kell. Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el. Közismert tételekre (pl. Menelaosz-tétel, Hölder-egyenlőtlenség stb.) elegendő a nevükkel hivatkozni, egyéb esetekben ki kell mondani a felhasznált tételt, és fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám vagy internet-cím). Tételekre való hivatkozáskor azt is meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Többször előfordult már, hogy egy-egy feladat szerepelt valamely példatárban, vagy megtalálták az interneten. Arra is láttunk példát, hogy egy folyóiratcikkben, vagy éppen a KöMaL egy korábbi feladatában a feladatban kitűzöttel lényegében ekvivalens, vagy annál általánosabb állítás bizonyítása szerepelt. Célunk továbbra is versenyzőink problémamegoldó képességének fejlesztése, nem pedig a keresőprogramok tesztelése, ezért **nem adunk pontot azokra a dolgozatokra, amelyek csak a megoldás helyét közlik, vagy azt mutatják meg, hogy a feladat egy nehezebb tétel speciális esete vagy triviális következménye; a végeredményhez vezető megoldást részletesen le kell írni.**

Ha a megoldáshoz könyvekben vagy az interneten talált írásokat használsz fel, és ezekből idézel, tüntesd fel a felhasznált forrásokat.

A **fizika feladatoknál** előfordulhat, hogy a feladat szövege nem tartalmaz a numerikus megoldáshoz szükséges minden konkrét információt, például bizonyos anyagi állandókat, földrajzi vagy csillagászati mennyiségek számszerű értékeit. Ilyenkor vagy a Négyjegyű függvénytáblázatokban, vagy az **interneten** kereshetjük meg a szükséges adatokat.

A hosszabb, összetettebb gondolatmeneteket érdemes tagolni, részekre bontani; használj, bekezdéseket, részeket, címeket és alcímeket. A különböző segédállításokra, képletekre és ábrákra könnyebb hivatkozni, ha megszámozod.

A geometria feladatok megoldásának fontos részei az ábrák, amelyeken követni és ellenőrizni lehet a lépéseket. Mindig rajzolj ábrát, az ábra nélküli megoldásokat nem tekintjük teljesnek. Bonyolultabb ábrák esetén az egyes geometriai objektumokat szövegesen is definiáld (pl. „legyen $P'$ a $P$ pont tükörképe az $e$ egyenesre”). Elektronikus beküldés esetén ügyelj a megfelelő felbontásra. A felbontás akkor megfelelő, ha a számítógép képernyőjén elfér, és a fontos részletek is jók kivehetőek. A jó ábra mérete többnyire 500–1000 pixel között lehet.

A matematika példák megoldásaként számítógépes programokkal – beleértve az olyan online szolgáltatásokat is, mint például a Wolfram Alpha – kiszámított eredményeket nem fogadunk el. Ha harmincnál több esetet vizsgálsz, pedig lényegesen le lehetett volna szűkíteni az esetek számát, azt is úgy tekintjük, mintha programot írtál volna.

**Mérési feladatok**

A mérési jegyzőkönyv feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával, esetleg fotókkal), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is megadva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését. A mért és számított mennyiségeket ne adjuk meg indokolatlanul sok tizedesjeggyel, hanem csak a becsült hibával összhangban álló pontossággal. A mérési jegyzőkönyv legyen viszonylag tömör, de annyira áttekinthető, hogy annak alapján bárki meg tudja ismételni a leírt mérést. Nagyon sok (50-nél több) mérési adat esetén elegendő azoknak csak egy „reprezentatív” részét beküldeni és a többinek csak az átlagát közölni. A 6 oldalnál hosszabb jegyzőkönyv tartalmazzon egy rövid (kb. 1/2 oldalas) összefoglalást.

**Informatika megoldások**

Az I-jelű programozási feladatok megoldását Basic, C++, C#, Java, Pascal vagy Python nyelvek egyikén kell elkészítened. A fejlesztéshez bármilyen fejlesztőkörnyezet használhatsz, javasoljuk az Oktatási Hivatal honlapján elérhető emelt szintű érettségi szoftverlista fejlesztőeszközeit.

Az I-pontversenyben kitűzött alkalmazói feladatok megoldásához szintén az előbbi szoftverlista eszközeit javasoljuk. Az alkalmazói feladatokat a listán szereplő alkalmazásokkal fogjuk értékelni. Az egyéb használható alkalmazásokat egy-egy feladat leírása tartalmazza, ezek jórészt szabadon fölhasználható programok.

Az I/S és S-jelű feladatok megoldását C, C++, Pascal vagy Java nyelvek valamelyikén kell elkészítened. A megoldáshoz dokumentációt kell írnod és a forráskódot kommentekkel kell kiegészítened. A különálló dokumentációban a megoldás elvi menetének, algoritmusának ismertetését várjuk. A forráskód kommentezésének lényege, hogy segítségével – a dokumentáció ismeretében – könnyen megérthető legyen az egyes kódsorok, kódrészletek feladata, szerepe a megoldás menetében.

Az I/S és S-jelű programozási feladatok megoldását ellenőrizd az `http://ideone.com` tesztkörnyezetben a feladathoz elérhető bemenetekkel. Ezeknek a feladatoknak az értékelése részben automatikusan történik, ezért fontos, hogy a program az előírás szerinti formában adjon kimenetet.

## A megoldások elkészítése és beküldése

**Megoldásodat a Munkafüzetben küldd be.**

A matematika és fizika dolgozatokat honlapunkon megszerkesztheted vagy kész fájl formájában feltöltheted. Az informatika feladatok megoldását csak feltölteni tudod.

Azokat a dolgozatokat, amelyek több feladat megoldását tartalmazzák egy fájlban, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem versenyszerűnek tekintjük. Nem versenyszerű továbbá az olyan megoldás, ahol rendes képletek helyett nehezen értelmezhető karaktersorozatok vannak, pl. `x2+((1+5+2sqrt(5)x2)/4` vagy `(1+gyök5)/2*x`.

**A megoldások online szerkesztése az Elektronikus Munkafüzetben**

Az Elektronikus Munkafüzet a honlapunk része. Webes felület, amely lehetőséget ad a megoldás közvetlen beírására, szerkesztésére. A megoldásaidat módosíthatod, átszerkesztheted a beküldési határidőig.

Képletek szerkesztéséhez a TEX rendszert használjuk. Javasoljuk, hogy honlapunkon járd végig a *TEX tanfolyamot* (`https://www.komal.hu/mf?a=tk`).

**Kész fájlok feltöltése**

Megoldásaidat az otthoni vagy iskolai számítógépeken is elkészítheted, és a kész fájlt honlapunkon feltöltheted. Matematika és fizika feladatok megoldása esetén a többféle operációs rendszerben olvasható **PDF formátumot** használd. A dokumentum elején legyen ott az ún. fejléc: a feladat száma pirossal, név, osztály, város, iskola, e-mail cím.

**Kézírással készült megoldásodat megfelelő minőségben, egy darab pdf fájlként töltsd fel a Munkafüzetbe.**

Ügyelj arra, hogy a kép jól olvasható legyen, és a felbontás ne legyen se túl nagy, se túl alacsony. Ha fényképezel, érdemes több képet készíteni szórt (természetes) fénynél, és a legjobban sikerült képet használni. A képet fordítsd álló helyzetbe, a szélét vágd körbe, hogy csak a megoldás maradjon a képen, végül méretezd át.

Fényképek feldolgozására sokféle képmanipuláló programot és telefonos applikációt használhatsz. Mi a CamScannert ajánljuk leginkább, mert ezzel könnyen készíthetsz egy darab megfelelő pdf fájlt.

**Az informatika megoldások beküldése**

**Az informatika feladatok megoldásait kizárólag kész fájlként tudod feltölteni a Munkafüzetbe.** Amennyiben a megoldás több fájlból áll, úgy egy, a fájlok mindegyikét és a dokumentációt is tartalmazó, a feladat sorszámával egyező nevű mappát kell ZIP tömörítéssel becsomagolva egyetlen fájlként beküldened. Ügyelj arra, hogy a tömörített állományokba futtatható fájlok (pl. a fejlesztéskor létrejövő `.exe` állomány) ne kerüljenek.

A programozási feladatoknál a forráskód első soraiban megjegyzésként szerepeljen

- a feladat száma;
- a versenyző teljes neve (jelzőszámmal) és osztálya;
- az iskola neve városnévvel együtt;
- a versenyző e-mail címe;
- az alkalmazott fordítóprogram neve és verziószáma.

Kérjük, hogy a programozási feladatoknál a program be- és kimenete mindig a feladatban megadott módon valósuljon meg. Erre azért van szükség, mert a beküldött programokat sokféle tesztadatra lefuttatjuk, és ezt igyekszünk automatizálni.

Az informatika feladatokkal kapcsolatos bárminemű kérdéseket, esetleges reklamációkat az `inf-szerk@komal.hu` címre várjuk.

**A beküldési határidő**

A beküldési határidő matematikából a lap megjelenését követő hónap 10., **fizikából és informatikából a 15. napja;** szombat, illetve munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. Vedd figyelembe az internet esetleges hibáit és a beküldési határidő idő előtti órákban a szerver gépünk esetleges túlterheltségét; ilyen okokra hivatkozva sem fogadunk el késedelmes dolgozatokat.

## Értékelés

A pontversenyek állását és versenyzőink részletes eredményeit a honlapunkon folyamatosan közöljük. Kérjük, vegyétek figyelembe, hogy a postai kézbesítés és a dolgozatok feldolgozása sok időt vesz igénybe; általában a beküldési határidő után 1–2 hónappal jelennek meg az eredmények. Versenyzőinket e-mailben is értesítjük a pontszámok változásairól. Javítóink a pontszámon kívül szöveges értékelést is küldhetnek, például felhívhatják a figyelmedet a dolgozatod hiányosságaira. Ez azonban nem kötelező, ugyanis a javítóknak nem ritkán százas nagyságrendű dolgozatot kell kijavítani.

### Reklamációk

A dolgozatok értékelése után az Elektronikus Munkafüzetben rövid kérdést vagy üzenetet küldhetsz a javítónak, ő pedig ugyanott válaszolhat. A különböző feladatokat különböző javítók javítják, ezért mindig csak az adott feladatról kérdezz.

Ügyelj az udvarias hangvételre. Olyan módon kérdezz, amit szemtől-szembe, akár a tanáraiddal vagy a szüleiddel szemben is helyesnek tartanál.

Eldöntetlen vita, reklamáció esetén a szerkesztőséghez fordulhatsz. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el a `szerk@komal.hu` címen.

### Szabálytalan versenyzés

**FONTOS! A versenyek egyéni versenyek; a versenyzőknek önállóan kell elkészíteniük a példák megoldásait.** A mérési verseny kivételével (lásd az M-pontverseny leírását) tilos a kitűzött feladatokat a beküldési határidő előtt másokkal megvitatni, másoktól segítséget kérni vagy elfogadni a feladatok megoldásához. A közösen készített vagy másolt dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – *nem versenyszerűnek értékeljük.* A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak. Súlyosabb, az egész pontversenyt veszélyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket kizárjuk a versenyből.

### A végeremény közzététele

A versenyek végeredménye az összes dolgozat kijavítása után, várhatóan augusztus elején a honlapunkon, majd a 2021. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2021. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2021. évi *KöMaL Ifjúsági Ankét* rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

## Néhány megjegyzés

A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket postán vagy e-mailben juttathatják el szerkesztőségünkbe. Szép, érdekes és nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott javaslatai közül a legszebbeket különdíjban részesítjük.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

**a Szerkesztőség**

## C gyakorlat megoldása

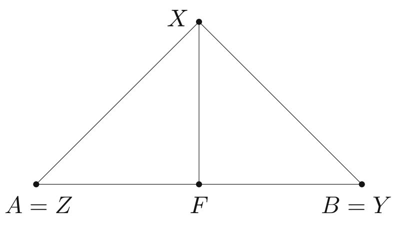
**C. 1549.** *Az $AB$ szakasz felezőpontja legyen $F$, továbbá legyen az $AF$ szakasz egy tetszőleges pontja $Z$. $F$-ben merőlegest állítunk $AB$-re és felmérjük rá az $FX = FA$ távolságot. $B$-ben is merőlegest állítunk $AB$-re és felmérjük rá a $BY = AZ$ távolságot úgy, hogy $X$ és $Y$ az $AB$ egyenesének egyazon oldalán legyenek. Mekkora lehet az $XZY$ szög?*

Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

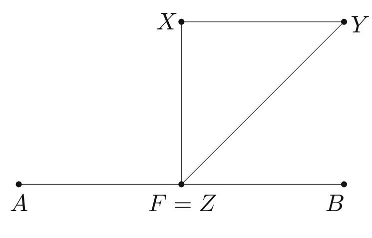
**Megoldás.** Készítsünk ábrát geogebrában, hátha megsejtünk valamit. A netes megoldás az alábbi oldalon található, és ott letölthető egy geogebra fájl, melyben a $Z$ pont mozgatható az $AF$ szakaszon: `https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=C1549&l=hu`.

Ez alapján az a sejtés, hogy a kérdéses szög értéke $45°$, illetve az $XYZ$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Bizonyítsuk ezt be.

Ha a $Z$ pont az $A$ pontba esik, akkor az $Y$ pont a $B$ ponttal egyezik meg, és az $XZY$ háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, $XZY\sphericalangle = 45°$ (*1. ábra*).




*1. ábra*

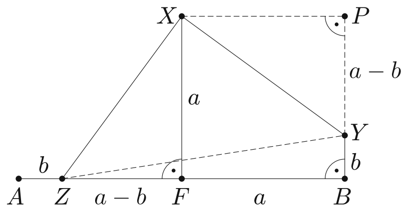



*2. ábra*

Ha a $Z$ pont az $F$ pontba esik, akkor az $XZBY$ négyszög négyzet, az $XZY$ háromszög ekkor is egyenlő szárú derékszögű háromszög, és $XZY\sphericalangle = 45°$ (*2. ábra*).

Ha a $Z$ pont máshol helyezkedik el, arra az esetre adunk három megoldást. A honlapon két, ezektől különböző megoldás olvasható.

**I. megoldás.** Állítsunk merőlegest az $X$ pontból a $BY$ egyenesre, a talppontot jelölje $P$. Az $FBPX$ négyszög négyzet, mert három szöge derékszög és $FB = FX = a$. Ezért $PB = a$, és így $PY = a - b$ (*3. ábra*).



*3. ábra*

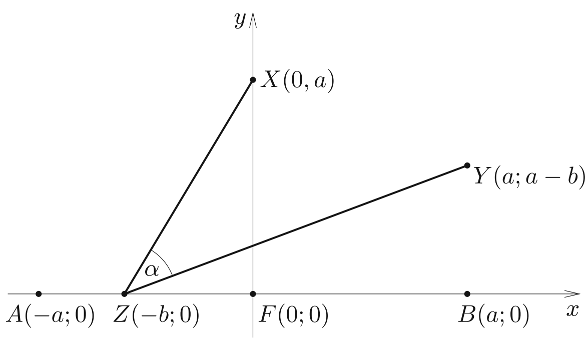
Mivel $PY = FZ = a - b$, $PX = FX = a$ és $YPX\sphericalangle = ZFX\sphericalangle = 90°$, ezért az $YPX$ és a $ZFX$ háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy $XY = XZ$ és $YXP\sphericalangle = ZXF\sphericalangle$. Innen adódik, hogy

$$90° = FXP\sphericalangle = FXY\sphericalangle + YXP\sphericalangle = FXY\sphericalangle + ZXF\sphericalangle = ZXP\sphericalangle,$$

és így

$$XZY\sphericalangle = \frac{180° - 90°}{2} = 45°.$$

**II. megoldás.** Helyezzük az ábrát koordinátarendszerbe úgy, hogy az $F$ pont az origóban legyen, az $A$ pont koordinátája $(-a; 0)$, a $Z$ ponté pedig $(-b; 0)$. Ekkor a $B$ pont koordinátái $(a; 0)$, az $Y$ ponté pedig $(a; a - b)$ (*4. ábra*).



*4. ábra*

Írjuk fel a $\overrightarrow{ZX}$ és $\overrightarrow{ZY}$ vektorok skalárszorzatát kétféleképpen. Mivel $\overrightarrow{ZX} = (b; a)$ és $\overrightarrow{ZY} = (a + b; a - b)$, ezért egyrészt

$$\overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{ZY} = b(a + b) + a(a - b) = ab + b^2 + a^2 - ab = a^2 + b^2.$$

Másrészt

$$\overrightarrow{ZX}\cdot\overrightarrow{ZY}=\sqrt{b^2+a^2}\cdot\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}\cdot\cos\alpha=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2\big(a^2+b^2\big)}\cdot\cos\alpha=\sqrt{2}\big(a^2+b^2\big)\cos\alpha.$$

A kétfajta felírás egyenlő egymással:

$$\sqrt{2}\big(a^2+b^2\big)\cos\alpha=a^2+b^2,$$

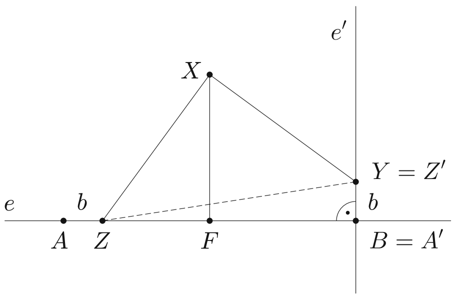
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha=45^\circ,$$

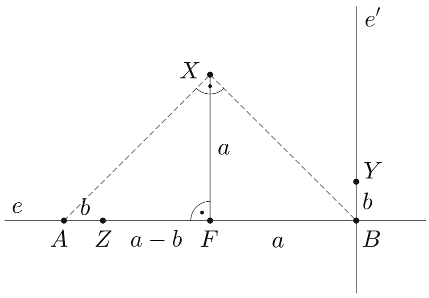
mivel 0° és 90° között van.

*Gál Bence* (Szolnok, Varga Katalin Gimn., 11. évf.)

**III. megoldás.** Mivel $FA=FX=FB$ és $AFX\sphericalangle=90^\circ$, ezért az $ABX$ háromszög egy $2a$ átlójú négyzet fele, $XA=XB$ és $AXB\sphericalangle=90^\circ$ (*5. ábra*).




*5. ábra*




*6. ábra*

Forgassuk el az $e:=AB$ egyenest az $X$ pont körül 90°-kal. A kapott $e'$ egyenes merőleges lesz az $e$ egyenesre, így megegyezik a feladatban $B$-ben állított $AB$-re merőleges egyenessel (*6. ábra*).

Mivel $AX=BX$ és $AXB\sphericalangle=90^\circ$, ezért a forgatás során $A$ képe $B$ lesz. Tudjuk, hogy $b=AZ=A'Z'=BY$, így $Z$ képe $Y=Z'$. Mivel a forgatás távolságtartó, így $XZ=XZ'=XY$, és mivel 90 fokkal forgattunk, így $ZXZ'\sphericalangle=ZXY\sphericalangle=90^\circ$. Tehát az $XZY$ egy egyenkő szárú derékszögű háromszög, és így a keresett szög, $XZY\sphericalangle=45^\circ$.

91 dolgozat érkezett. 5 pontos 62, 4 pontos 11, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 11 dolgozat. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

# Matematika feladatok megoldása

**B. 5001.** *Egy egyenlő szárú háromszög alapja $a$, szárszöge $120^\circ$-nál kisebb, az alaphoz tartozó magassága $m$. A háromszög mindegyik csúcsát tükrözzük a szemközti oldalegyenesre. A három kapott pont egy másik egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek alapja $a'$, alaphoz tartozó magassága pedig $m'$. Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{a'}{a}+\frac{m'}{m}=4.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál* (Budapest)

**Megoldás.** Legyen a háromszög alapja $BC$, szárainak metszéspontja $A$, szárszöge $\alpha$, a tükörképpontok $A'$, $B'$, $C'$, a magasságok talppontjai pedig $T_A$, $T_B$, $T_C$.

Kétféleképpen helyezkedhet el a tükrözéssel kapott háromszög az eredetihez képest, aszerint, hogy $\alpha$ kisebb vagy nagyobb, mint $60^\circ$. (Amennyiben $\alpha=60^\circ$, a háromszög szabályos, a tükrözések után egy kétszer akkora háromszöget kapunk, mindkét arány pontosan 2.)

*1. eset:* $\alpha<60^\circ$ (*1. ábra*). $CBT_B\triangle\cong DB'T_B\triangle$, hiszen a szimmetria miatt $B'C'\parallel CB$, így $CBT_B\sphericalangle=T_BB'D\sphericalangle$, $BCT_B\sphericalangle=T_BDB'\sphericalangle$, mert váltószögek, továbbá a tükrözés miatt $BT_B=T_BB'$. Ezzel beláttuk, hogy $B'D=a$. Ugyanígy igazolható az is, hogy $C'E=a$. Az egyik arány az eddigiek alapján:

$$\frac{a'}{a}=\frac{B'C'}{a}=\frac{B'D+ED+C'E}{a}=\frac{2a+ED}{a}=2+\frac{ED}{a}.$$

A tükrözés miatt $AT_A=T_AA'$, így a másik arány:

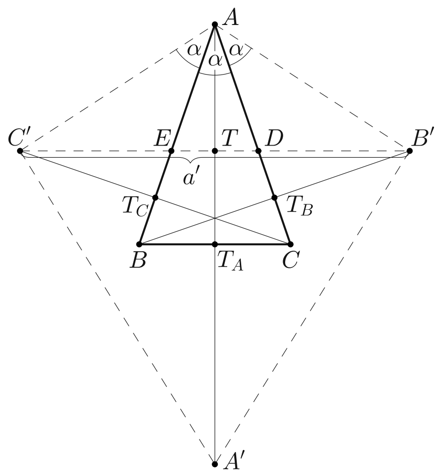
$$\frac{m'}{m}=\frac{TA'}{m}=\frac{AA'-AT}{m}=\frac{2m-AT}{m}=2-\frac{AT}{m}.$$

Az $ADE\triangle\sim ABC\triangle$, az oldalak és magasságok aránya megegyezik, vagyis $\frac{ED}{BC}=\frac{AT}{AT_A}$. Az $a$ oldalt és az $m$ magasságot beírva: $\frac{ED}{a}=\frac{AT}{m}$. Ebből a két arány összege valóban:

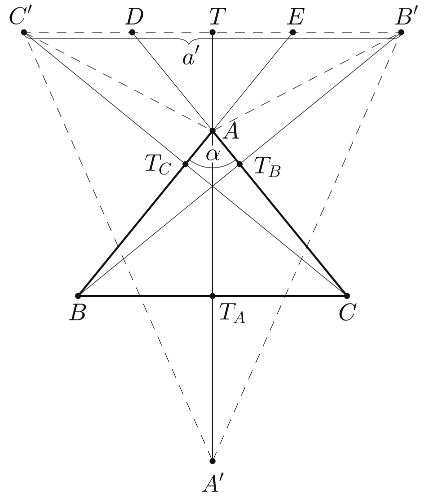
$$\frac{a'}{a}+\frac{m'}{m}=\left(2+\frac{ED}{a}\right)+\left(2-\frac{AT}{m}\right)=4.$$

*2. eset:* $\alpha>60^\circ$ (*2. ábra*). Az első eset szerint haladva a tükrözés és a szimmetria alapján $B'D=C'E=a$. Ezzel kapjuk, hogy

$$\frac{a'}{a}=\frac{B'C'}{a}=\frac{B'D+C'E-DE}{a}=\frac{2a-DE}{a}=2-\frac{DE}{a}.$$




*1. ábra*




*2. ábra*

Az $A'B'C'$ háromszög alaphoz tartozó magassága $A'T = A'T_A + AT_A + AT = 2m + AT$. Az $m'/m$ arány:

$$\frac{m'}{m} = \frac{A'T}{m} = \frac{2m + AT}{m} = 2 + \frac{AT}{m}.$$

Az $ABC$ és $AED$ háromszögek hasonlóságából az alapjaik aránya megegyezik a hozzájuk tartozó magasságok arányával:

$$\frac{DE}{a} = \frac{AT}{m}.$$

A két arány összege tehát ismét:

$$\frac{a'}{a} + \frac{m'}{m} = 2 - \frac{DE}{a} + 2 + \frac{AT}{m} = 4.$$

*Lovas Márton* (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., Budapest, 8. évf.) dolgozata alapján

Összesen 59 dolgozat érkezett. 3 pontos 39, 2 pontos 12 tanuló dolgozata. 1 pontot 4, 0 pontot 4 tanuló kapott.

**B. 5095.** *Legyenek $a$, $b$, $c$ nullától különböző egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$ és $\frac{ca}{b}$ számok összege egész, akkor külön-külön is egészek.*

(*3 pont*) *George Stoica* (Saint John, Kanada)

**I. megoldás.** Indirekten tegyük fel, hogy az egyik tag nem egész. Mivel $a$, $b$ és $c$ szerepe felcserélhető, föltehetjük, hogy például az első tag, $\frac{ab}{c}$ nem egész. Ez azt jelenti, hogy van olyan $p$ prím, ami a nevező kanonikus alakjában magasabb kitevőn van, mint a számlálóban. Jelölje rendre $x$, $y$ és $z$ a $p$ legmagasabb hatványának a kitevőjét, amivel $a$, $b$ illetve $c$ osztható. Ekkor az $\frac{ab}{c}$ tört számlálójának prímtényezős alakjában a $p$ kitevője $x+y$, a nevezőjében $z$, és indirekt feltevésünk értelmében $z>x+y$.

A három tört összege

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c}{abc}=\frac{a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}{abc}.$$

Ez a tört egész, azaz a nevező osztja a számlálót. A számláló első tagjában $p$ kitevője $2x+2y$, $c^2$-ben $2z$, $\left(a^2+b^2\right)$-ben pedig legalább $\min(2x,2y)$; így $c^2\left(a^2+b^2\right)$ kanonikus alakjában a $p$ kitevője legalább

$$2z+\min(2x,2y)\geqslant 2z>2x+2y.$$

Ebből következik, hogy a tört számlálójában a $p$ maximális kitevője $2x+2y$. A tört nevezőjében viszont $p$ maximális kitevője $x+y+z>2x+2y$, ami ellentmondás.

*Fülöp Csilla* (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.)

**II. megoldás.** Az

$$\left(x-\frac{ab}{c}\right)\left(x-\frac{bc}{a}\right)\left(x-\frac{ca}{b}\right)=$$

$$=x^3-\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)x^2+\left(\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\cdot\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}\right)x-\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}=$$

$$=x^3-\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)x^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)x-abc$$

egész együtthatós polinom főegyütthatója 1, racionális gyökei pedig $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ és $\frac{bc}{a}$.

A Rolle-tétel (racionális gyökteszt)* miatt ezek a gyökök egészek is, ami éppen a feladat állítása.

*Hervay Bence* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.),
*Mácsai Dániel* (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 11. évf.)

52 dolgozat érkezett. 3 pontos 32, 2 pontos 3, 1 pontos 12 versenyző. 0 pontos 5 versenyző.

**B. 5105.** *Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg azt a legkisebb k számot, ahány színnel bármilyen n csúcsú irányított egyszerű gráf élei színezhetők úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör.*

(*4 pont*) Javasolta: *Szabó Kornél* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

*`http://math.bme.hu/ nagyat/rolle.pdf`

**I. megoldás.** Ha $n \leqslant 2$, akkor nyilván $k=1$, hiszen a gráfban nem lehet irányított kör.

Tegyük fel ezután, hogy $n \geqslant 3$. Ekkor $k \geqslant 2$, mivel például egy irányított $n$ hosszú kör megfelelő színezéséhez legalább két szín szükséges. Megmutatjuk, hogy $k=2$ szín már mindig elegendő. Számozzuk meg a gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, n$ számokkal, és egy $i$ csúcsból egy $j$ csúcsba mutató irányított él legyen piros, ha $i<j$, és legyen kék, ha $i>j$. Ekkor, ha az $i_1, i_2, \ldots, i_t$ csúcsok ebben a sorrendben egy egyszínű irányított kör csúcsai lennének, akkor vagy $i_1<i_2<\ldots<i_t<i_1$-nek, vagy $i_1>i_2>\ldots>i_t>i_1$-nek kellene teljesülnie, azonban világos, hogy ezek egyike sem állhat fenn. Ezzel mutattunk olyan színezést 2 színnel, ami megfelelő.

Tehát $n=1,2$ esetén $k=1$, $n \geqslant 3$ esetén pedig $k=2$.

**II. megoldás.** Az $n$ szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $n \geqslant 3$ esetén $k=2$. A kezdeti feltételek nyilvánvalóan teljesülnek. Tegyük fel, hogy az állítás minden $n$ csúcsú gráfra igaz, és tekintsünk egy $n+1$ csúcsú gráfot. Válasszuk ki ennek egyik, $P$ csúcsát. A $P$ csúcsot és a vele szomszédos éleket elhagyva, a kapott $n$ csúcsú gráf az indukciós feltevés szerint megfelelően kiszínezhető két színnel. A $P$-vel szomszédos élek közül pedig a $P$-be menőket színezzük pirosra, a $P$-ből indulókat pedig kékre. Így az egész gráf színezése megfelelő: ha egy irányított kör nem megy át $P$-n, akkor az indukciós feltevés szerint nem lehet egyszínű. Ha pedig átmegy $P$-n, akkor tartalmaz egy $P$-be menő és egy $P$-ből induló élt is, és ezek különböző színűek.

*Argay Zsolt* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

**III. megoldás.** Egy szín biztosan nem lesz elég, hiszen lehet a gráfban irányított kör. Megmutatjuk, hogy egyébként pedig két szín elég lesz. Kezdjük el az egyik színnel (piros) beszínezni az éleket, és legyen a színezésünk olyan értelemben maximális, hogy jelenleg még nincs piros irányított kör, de ha bármelyik további élt színeznénk pirosra, akkor már lenne. Színezzük ezért a többi élt kékre. Megmutatjuk, hogy ekkor nincs kék irányított kör. Tegyük fel indirekt, hogy van kék irányított kör: $B_1, B_2, \ldots, B_t, B_1$. A $B_iB_{i+1}$ él nem lévén piros, a $B_{i+1}$-et $B_i$ -vel irányított piros út köti össze (minden $i=1, \ldots, t$-re). Legyen ez az út: $B_{i+1}A_1^iA_2^i\ldots A_{k_i}^iB_i$. Tekintsük a következő piros irányított utakat:

$$\big(B_1A_1^tA_2^t\ldots A_{k_t}^tB_t\big),\ \big(B_tA_1^{t-1}A_2^{t-1}\ldots A_{k_{t-1}}^{t-1}B_{t-1}\big),\ \ldots,\ \big(B_2A_1^1A_2^1\ldots A_{k_1}^1B_1\big).$$

Ezeket összefűzve egy piros irányított kört kapunk a $B_v$ csúcsokon keresztül. Elképzelhető, hogy az összefűzött utaknak volt közös csúcsa vagy éle, de ez csak annyit jelent, hogy több piros irányított kört is kaptunk. Ez azonban ellentmond a piros szín használatával kapcsolatban megfogalmazott feltételünknek, azaz ellentmondásra jutottunk, tehát bizonyításunk teljes.

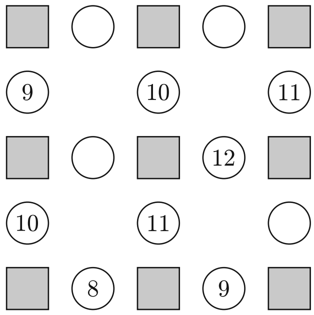
*Kerekes Boldizsár* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

45 dolgozat érkezett. 4 pontos 38, 3 pontos 2, 2 pontos 1, 1 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

# A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (659–663.)

**K. 659.** Hány olyan különböző négyszög van, amelynek csúcsai egy adott szabályos kilencszög csúcsai közül valók és a négyszög a belsejében tartalmazza a kilencszög középpontját? (Az egybevágó négyszögeket nem tekintjük különbözőnek.)

**K. 660.** Az *ábrán* látható négyzeteket kitöltöttük az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számokkal, majd a négyzetek közötti körökbe beírtuk mindenhol a két szomszédos négyzetbe írt szám összegét. Ezután néhány körből a benne lévő számot kiradíroztuk, a négyzeteket pedig besatíroztuk.




*a*) Melyik számokat radíroztuk ki az üres körökből?

*b*) Írjuk be mindegyik négyzetbe azt a számot, amit eredetileg beleírtunk.

**K. 661.** Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög 2 egység hosszú $BC$ és $GH$ oldalára a $BCIM$ és a $GHNP$ négyzetet rajzoljuk befelé. Igazoljuk, hogy az $N$ és $M$ pontok egybeesnek.

**K. 662.** Egy sorozat első négy tagja 1-es. Az ötödik tagtól kezdve minden tag értékét úgy kapjuk, hogy a hárommal és a néggyel előtte álló tagot összeadjuk. Hány páros szám van a sorozat első 150 tagja között?

**K. 663.** Öt egymást követő egész számra igaz, hogy az első három négyzetének összege megegyezik az utolsó kettő négyzetének összegével. Melyek lehetnek ezek a számok?

**Beküldési határidő: 2020. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`

**Figyelem!** Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2020. október 2-án, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A verseny helyszíneiről és lebonyolításáról szóló információkat később tesszük közzé a

`http://bolyai.hu/kurschak.htm`

oldalon.

# A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1616–1622.)

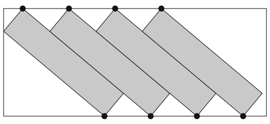
## Feladatok 10. évfolyamig

**C. 1616.** Oldjuk meg az

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{\frac{5z}{4}+\frac{13}{6v}}}=\frac{135}{113}$$

egyenletet, ha $x$, $y$, $z$, $v$ pozitív egész számok.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



**C. 1617.** Elhelyezhető-e átfedés nélkül négy darab $2\times 8$-as téglalap egy $7\times 15$-ös téglalap belsejében az *ábrán* látható elrendezésben? (Az ábra nem arányos.)

## Feladatok mindenkinek

**C. 1618.** Bizonyítsuk be, hogy az $a_n=\frac{(n-1)n}{n+1}$ sorozat elemeire $n\geqslant 1$ esetén fennáll:

$$\frac{2}{3}\leqslant a_{n+1}-a_n<1.$$

**C. 1619.** Egy hegyesszögű háromszög mindhárom oldalfelező pontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Bizonyítsuk be, hogy a behúzott szakaszok által meghatározott hatszög területe a háromszög területének felével egyenlő.

(*Horvát feladat*)

**C. 1620.** Mekk Elek, az ezermester egy ugródeszkát eszkábált az udvarára. Mérései alapján megállapította, hogy ha a róla való elugráshoz a deszka vége az alaphelyzet alá hajlik $x$ dm-rel, akkor a deszkáról $0{,}5x^2+ax+b$ dm magasra tud ugrani. Sajnos $a$ és $b$ értékét elfelejtette, azonban arra emlékszik, hogy ha 10 cm-t hajlott le a deszka, akkor 35 cm magasra ugrott, négyszer ekkora lehajlásnál pedig négyszer ekkorát ugrott. Milyen $a$, illetve $b$ értékeket határozott meg Mekk Elek?

## Feladatok 11. évfolyamtól

**C. 1621.** Egy érintőtrapéz oldalainak mérőszámai egész számok, melyek valamilyen sorrendben egy számtani sorozat szomszédos elemeit képezik. Tudjuk, hogy a beírható körének sugara és a rövidebbik alapja egyaránt 6. Mekkora a másik három oldala?

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

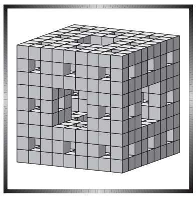
**C. 1622.** Bizonyítsuk be, hogy az $y=1-|x-1|$ és az $y=|2x-a|$ függvények grafikonja által közrezárt alakzat területe kisebb, mint $\frac{1}{3}$, ha $1<a<2$.

(*Horvát feladat*)

**Beküldési határidő: 2020. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

## A B pontversenyben kitűzött feladatok (5110–5117.)



**B. 5110.** Egy egyenlő szárú háromszögbe írható körnek az oldalakkal párhuzamos érintői a háromszögből három kis háromszöget vágnak le. Bizonyítsuk be, hogy az alapra illeszkedő kis háromszögek alaphoz tartozó magassága megegyezik a háromszögbe írható kör sugarával.

(*3 pont*)

**B. 5111.** Az $a$ és $b$ valós számokról tudjuk, hogy $a+b=1$ és $a^2+b^2=2$. Határozzuk meg $a^8+b^8$ értékét.

(*3 pont*) *Szalai Máté* (Szeged) javaslata alapján

**B. 5112.** Egy kártyapakliban $p$ darab piros és $k$ darab kék kártya van. Hányféleképpen választhatunk ki a pakliból kártyákat úgy, hogy a piros kártyák száma $n$-nel több legyen, mint a kék kártyák száma?

(*4 pont*)

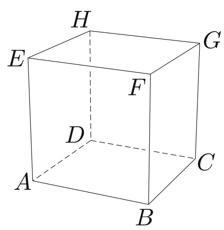
**B. 5113.** Legyenek $a$, $b$ és $c$ adott, páronként relatív prím pozitív egészek. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$x^a+y^b=z^c$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az $(x,y,z)$ pozitív egész számhármasok körében.

(*5 pont*)

**B. 5114.** Az $ABCDEFGH$ egységkockát elmetszettük egy síkkal úgy, hogy az $AB$ és $AD$ éleket az $A$-tól azonos, $x$ távolságra levő $P$ és $Q$ belső pontjaikban, a $BF$ élt pedig az $R$ pontban metszi. Mekkora a $BR$ távolság, ha $QPR\sphericalangle=120°$?




(*4 pont*)

**B. 5115.** Ali erszényében $n$ darab érme lapul, Babának pedig van $n-1$ darab, kezdetben üres erszénye. Baba a következő játékot játssza: a kezdetben egy erszényben lévő érméket szétosztja két erszénybe, egyikbe $a_1$, másikba $b_1$ érmét téve ($a_1, b_1 > 0$), és a táblára felírja az $a_1 b_1$ szorzatot. Majd innentől (az előzőhöz hasonlóan) a $k$-adik lépésben ($k = 2, 3, \ldots$) kiválaszt egy legalább két érmét tartalmazó erszényt, a benne lévő érméket szétosztja két üres erszénybe, egyikbe $a_k$, másikba $b_k$ érmét téve ($a_k, b_k > 0$), és a táblára felírja az $a_k b_k$ szorzatot.

A játék akkor ér véget, ha minden erszénybe 1-1 érme került. Ekkor Ali kiszámolja a táblán lévő $a_k b_k$ szorzatok összegét és ennyi aranyat ad Babának.

Legfeljebb mennyi aranyat kaphat Baba?

(*5 pont*)

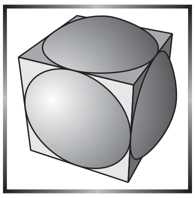
**B. 5116.** Legyen $a, b, c > 0$ és $x, y, z \geqslant 0$. Igazoljuk, hogy ha $x + aby \leqslant a(y+z)$, $y + bcz \leqslant b(z+x)$, és $z + cax \leqslant c(x+y)$, akkor $x = y = z = 0$ vagy $a = b = c = 1$.

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Kanada)

**B. 5117.** Az $A$, $B$, $C$, $D$ pontok (ebben a sorrendben) egy egyenesre esnek. Az $AB$, $BC$ és $CD$ szakaszokra (azonos félsíkban) emelt szabályos háromszögek harmadik csúcsai legyenek rendre $E$, $F$, illetve $G$. Jelöljük az egyenesen szomszédos pontok távolságát a következőképpen: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Mutassuk meg, hogy az $EFG\sphericalangle$ akkor és csak akkor $120°$-os, ha $a + c = b$ vagy $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$.

(*6 pont*)

**Beküldési határidő: 2020. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`



## Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (780–782.)

**A. 780.** Egy $n \times n$-es táblázatot kiszíneztünk úgy, hogy minden $2 \times 2$-es részben legyen legalább két azonos színű mező. Legfeljebb hány színt használhattunk a színezésben?

A *Dürer-verseny* feladata alapján

**A. 781.** Szeretnénk körzővel és vonalzóval megszerkeszteni egy egyenlő szárú háromszöget. Ehhez a következő négy adatból kapunk meg kettőt: a háromszög alapjának hossza ($a$), a háromszög szárának hossza ($b$), a beírt körének sugara ($r$), a körülírt körének sugara ($R$). A hat lehetséges esetből melyek azok, amikor a háromszög biztosan megszerkeszthető?

*Rubóczky György* (Budapest) ötlete alapján

**A. 782.** Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráf éleit mindig lehet úgy irányítani, hogy minden pont kifoka legfeljebb három legyen.

*Angol versenyfeladat*

**Beküldési határidő: 2020. október 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

## Informatikából kitűzött feladatok

**I. 514.** A helyiértékes számrendszerekben a számok számjegyeit a számrendszer alapszámának megfelelő hatványával szorozzuk, hogy megkapjuk a szám értékét. Például a 143 esetében $1\cdot10^2+4\cdot10^1+3\cdot10^0$, azaz $100+40+3$ a szám értéke. A negatív számokat egy előjellel jelöljük, de a felírás itt is ugyanúgy történik. Ha azonban alapszámnak egy negatív számot választunk, akkor nem lesz szükségünk előjelre. Legyen a számrendszer alapszáma $-10$. Ekkor a $-10$ alapú számrendszerben felírt szám számjegyeit $-10$ hatványaival szorozzuk, tehát a $345_{-10}$ szám értéke $3\cdot(-10)^2+4\cdot(-10)^1+5\cdot(-10)^0$, vagyis 265. Könnyen belátható, hogy a $-10$ alapú számrendszerben is egyértelmű a számok felírása, de nincs szükség a negatív számok esetében az előjelre. Például $-25=-30+5$, tehát $-10$ alapú számrendszerben $35_{-10}$.

Készítsünk programot, amely $N$ darab 10-es számrendszerben megadott számot átvált $-10$-es számrendszerbe. A program a standard bemenet első sorából olvassa be az átváltandó számok darabszámát ($1\leqslant N\leqslant100$), majd a következő $N$ sorból az átváltandó $A$ számokat ($|A|\leqslant10^9$), és írja a standard kimenet $N$ darab sorába a számok felírását $-10$ alapú számrendszerben.

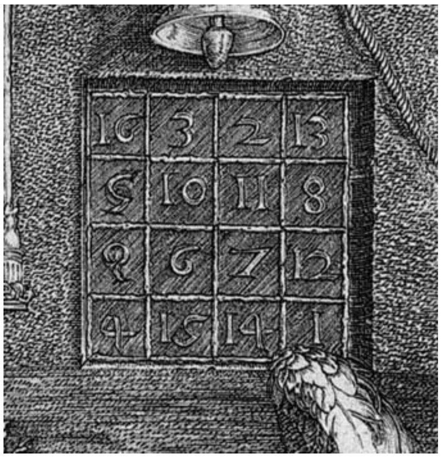
*Példa:*

| Standard bemenet | Standard kimenet |
|---|---|
| 3 | 1832 |
| -228 | 166 |
| 46 | 361 |
| 241 | |

Beküldendő egy tömörített `i514.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

**I. 515.** A bűvös négyzetek $N\times N$ egész számot tartalmaznak négyzetes elrendezésben. Minden szám egyedi, nem ismétlődik, és bármely sorban, oszlopban, valamint az átlókban szereplő számok összege ugyanaz az érték.

A bűvös négyzetek régóta ismertek. Egy híres bűvös négyzetet látunk Albrecht Dürer (1471–1528) magyar származású német festő és grafikus *Melankólia* című metszetének jobb felső sarkában. A négyzet alsó sorában középen szereplő két érték összeolvasva 1514, amely a kép keletkezésének éve.




Kaptunk egy $4\times 4$-es bűvös négyzetet, amely elképzelhető, hogy hibás. Ismerjük a minta készítőjét, aki néha felcserél oszlopokat, alkalmanként felcserél sorokat, de előfordul, hogy egy számot eltéveszt.

A számokat rögzítettük a `durer.txt` tabulátorral tagolt, UTF 8 kódolású állományban. Értékeljük ki a bűvös négyzetet táblázatkezelő segítségével az alábbiak szerint:

– Adjuk meg, hogy a bűvös négyzet helyesen van-e kitöltve.
– Ha számtévesztés történt, akkor adjuk meg a cellahivatkozást, ahol a hibás szám van és írjuk ki mellé a helyes értéket. A hibás cella hátterét feltételes formázással színezzük ki.
– Ha a számok helyesek soronként és oszloponként, de fel vannak cserélve, akkor írjuk ki, hogy az átlók tévesek.

*Minta:*

| | A | B | C | D | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 3 | 2 | 13 | | Téves szám! |
| 2 | 5 | 10 | 11 | 8 | | Hiba a C3 cellában van. |
| 3 | 9 | 6 | 8 | 12 | | Helyes érték a 7 lenne. |
| 4 | 4 | 15 | 14 | 1 | | |
| 7 | | | | | | |

Beküldendő egy `i505.zip` tömörített állományban a munkafüzet, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

**I. 516.** Mari néni és Bözsi néni is fogyni szeretne. A nagyobb motiváció érdekében figyelemmel kísérik egymás testsúlyának alakulását. Az adatokat minden hétfőn rögzítik a `fogyi.txt` állományba. A fájl sorai rendre Mari néni majd Bözsi néni tömegét tartalmazzák kg-ban egészre kerekítve az egymást követő heteken egy szóközzel elválasztva. A fájl legfeljebb egy év (53 hét) adatait tartalmazza.

```
87 85
86 88
```

A példában a második héten Mari néni 86 kg, Bözsi néni pedig 88 kg volt. Készítsünk `fogyokura` néven programot az alábbiak szerint. Minden esetben írassuk ki a feladat számát is.

1. Olvassuk be és tároljuk el az adatokat.
2. Kérjük be egy hét sorszámát, majd írassuk ki, hogy ezen a hétfőn hány kilogramm volt a két hölgy.
3. Írjuk ki a képernyőre, hogy hány olyan hét volt, amikor Mari néni tömege meghaladta Bözsi néniét.
4. Számítsuk ki, hogy mennyi volt a mérés ideje alatt Bözsi néni átlagos tömege. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal írassuk ki a képernyőre.
5. Vizsgáljuk meg, hogy melyik héten volt Mari néni tömege a legnagyobb. Ha több ilyen hét is volt, akkor mindegyiket írassuk ki a képernyőre.
6. Keressük meg, hogy mikor csökkent az előző héthez képest az egyik, illetve a másik hölgy tömege. Az eredményt egy-egy szóközzel elválasztva a következő formában írassuk ki a `csokken.txt` nevű szöveges állományba:

   ```
   Mari néni: 12-13 13-14 15-16
   Bözsi néni: 2-3 10-11 29-30
   ```

   Például Mari néni súlya a 12. hétről a 13. hétre csökkent, majd a 13. hétről a 14. hétre is stb.
7. Írjuk egy táblázatban a képernyőre, hogy adott tömegeket mely heteken mért Mari néni. Például:

   ```
   86 kg: 2 4 8 12
   87 kg: 1 10 23
   88 kg: 15
   ```

   A táblázatban csak azok a tömegek szerepeljenek, amelyeket ténylegesen el is ért Mari néni.

Beküldendő egy tömörített `i516.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

**I/S. 46.** A 2020-as kanizsai CEOI versenyen $N$ versenyzőnek kellett 6 feladatot megoldania. Mindegyik versenyzőről tudjuk, hogy melyik feladatra hány pontot szerzett. Adjuk meg a legkisebb különbséget, ami két versenyző összesített pontszáma közt előfordult.

*Bemenet:* az első sor tartalmazza az $N$ számot. A következő $N$ sor mindegyike 6 számot tartalmaz: az $i$-edik sor az $i$-edik versenyző kapott pontszámait tartalmazza sorrendben a hat feladatra.

*Kimenet:* az egyetlen sorban szerepel a keresett legkisebb különbség.

*Példa:*

| **Bemenet** (a / jel sortörést helyettesít) | **Kimenet** |
|---|---|
| `3 / 100 100 45 56 100 36 / 100 100 30 100 100 36 100 45 65 100 100 36` | `9` |

*Korlátok:* $1 \leqslant N \leqslant 10^5$. Minden pontszám 0 és 100 közti. Időkorlát: 0,2 mp.

*Értékelés:* a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 100$.

Beküldendő egy `is45.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

**S. 145.** Van egy szótárunk $N$ db szóval. Azt szeretnénk tudni, hányféleképpen tudjuk a szótárból választott szavakat a dominóhoz hasonlóan összeilleszteni úgy, hogy azok $K$ betű hosszan átfedjék egymást. Tehát a kérdés: hány olyan $(i, j)$ rendezett számpár $(1 \leqslant i, j \leqslant N)$ van, melyre az $i$-edik szó utolsó $K$ betűjéből alkotott sorozat megegyezik a $j$-edik szó első $K$ betűjéből alkotott sorozattal.

*Bemenet:* az első sor tartalmazza az $N$ és $K$ számokat. A következő $N$ sor mindegyike egy, az angol ABC kisbetűiből álló (nem feltétlenül értelmes) szót tartalmaz.

*Kimenet:* a megfelelő összeillesztések, vagyis számpárok száma.

*Példa:*

| **Bemenet** (a / jel sortörést helyettesít) | **Kimenet** |
|---|---|
| `4 2 / sapka / kalap / baba / bamba` | `3` |

*Korlátok:* $2 \leqslant N \leqslant 10^5$, $1 \leqslant K \leqslant 100$, minden szó legalább $K$ és legfeljebb 100 betű hosszú. Időkorlát: 1 mp.

*Értékelés:* a pontok 30%-a kapható $K = 1$ esetén. A pontok további 30%-a kapható, ha $N \leqslant 100$.

Beküldendő egy `s145.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

**A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:**
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
**Beküldési határidő: 2020. október 15.**

❄

# Beszámoló a 2020. évi Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyről

A Nemzetközi Fizikai Diákolimpián (IPhO-n) résztvevő ötfős magyar csapat hagyományosan a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyen kerül kiválasztásra minden évben. Az utóbbi években a Kunfalvi-versenyen szereplő diákoknak „olimpiai stílusú” feladatokat kellett megoldaniuk elméleti és mérési fordulók során. Azonban az év elején megjelent koronavírus-járvány miatt az idei olimpia, és így a válogatóverseny sorsa is bizonytalanná vált. Május végére kiderült, hogy bár az idei, 51. IPhO-t a következő évre halasztják, de az Európai Fizikai Diákolimpiát (EuPhO-t) online módon mégis megtartják. Ekkor vált szükségessé a Kunfalvi-verseny rendhagyó, online formában való megszervezése.

Március közepéig még a megszokott módon történt a felkészülés a budapesti, miskolci, pécsi, szegedi és székesfehérvári olimpiai szakkörökön. A szakkörre járó diákok közül végül 18-an kaptak meghívást a Kunfalvi-versenyre korábbi versenyeredményeik és a helyi elöválogatókon elért eredmények alapján. A koronavírus-járvány ellen bevezetett intézkedések miatt a Kunfalvi-verseny a résztvevő diákok otthonaiban zajlott június 2-3. között. Mivel az EuPhO-n nem az olimpiai stílusú, hosszú feladatok, hanem három (az Eötvös-versenyhez hasonló jellegű), rövidebb elméleti feladat, továbbá hasonlóan ötletes mérési feladatok megoldása a cél, így az idei válogatóverseny nemcsak a helyszín, de a feladatok stílusa miatt is különleges volt.

Az első versenynap egy négy és fél órás mérési fordulóval indult, majd egy ugyanilyen időtartamú, három példából álló elméleti forduló következett. A második versenynapon pedig egy második, szintén három elméleti feladatból álló fordulón vettek részt a versenyzők. Az idő leteltével mindenkinek 15 perce volt, hogy valamilyen elektronikus eszközzel digitalizálja a munkáját, és e-mailben elküldje a versenybizottságnak. Az elméleti feladatokat alább részletesen közöljük, a mérési feladatot csak röviden összefoglaljuk.

A verseny előtt két héttel minden résztvevő megkapta e-mailben a méréshez szükséges, egyszerű eszközök listáját, a mérési feladat szövegét viszont csak a verseny kezdetekor kapták meg a diákok. A mérés során egy hajszál nyírási modulusát kellett meghatározni. Elsőként a hajszál végére két 100 Ft-os érmét ragasztottak a versenyzők, majd az így készített, felfüggesztett torziós inga lengésidejét vizsgálták különböző amplitúdók és hajszálhosszak esetén. A mérési adatok és a Hooke-törvény felhasználásával a hajszál direkciós nyomatéka meghatározható volt a hajszál hosszának függvényében. Elméleti megfontolások szerint a direkciós nyomaték a hossz reciprokával arányos, az arányossági tényező pedig tartalmazza a hajszál átmérőjét és nyírási modulusát. A nyírási modulus kiszámításához tehát szükség van a hajszál vastagságára is, amit a hajszálon történő fényelhajlás távoli ernyőn felfogott képének elemzésével határoztak meg a versenyzők. A mérés ezen részében lényeges volt a minél pontosabb beállítás, hogy a lehető legtöbb elhajlási minimumot lehessen észlelni.

A beérkezett dolgozatok kijavítása után kialakult a végeredmény. A Kunfalvi-versenyen elért pontszámuk sorrendjében az alábbi diákok szerepeltek a legjobban:

**Fajszi Bulcsú** (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.), felkészítő tanárai: *Csefkó Zoltán* és *Horváth Gábor;*

**Pácsonyi Péter** (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium, 12. oszt.), felkészítő tanára: *Pálovics Róbert;*

**Bokor Endre** (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. oszt.), felkészítő tanára: *Schramek Anikó;*

**Marozsák Tádé** (Óbudai Árpád Gimnázium, 12. oszt.), felkészítő tanára: *Gärtner István;*

**Jánosik Áron** (Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr, 12. oszt.), felkészítő tanára: *Juhász Zoltán.*

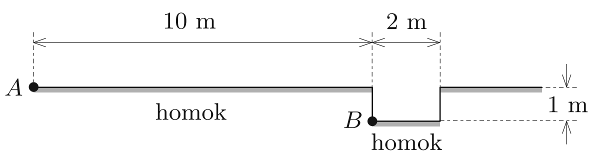
A kiválasztott öt diák vehetett részt a 4. EuPhO-n, ami szintén online verseny volt. A verseny beszámolóját a következő számban közöljük.

**Sarkadi Tamás, Szász Krisztián, Tasnádi Tamás,**
**Vankó Péter** és **Vigh Máté**

## A 2020. évi Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny elméleti feladatai*

### Az első elméleti forduló feladatai (2020. június 2.):

**F1.** Az *ábrán* látható, homokkal borított talajon egy 2 m széles, 1 m mélységű gödör van, melynek alját szintén homok fedi. A gödör függőleges falai simák és merevek. Egy kis méretű, rugalmas golyót szeretnénk elhajítani a lehetséges legkisebb sebességgel a gödörtől 10 m-re lévő $A$ pontból úgy, hogy a golyó a gödör alsó, hajítás felőli $B$ pontjába érkezzen.




*A feladatok megoldását a KöMaL októberi számában közöljük. A későbbi versenyekre készülők a feladatok önálló megoldásával ellenőrizhetik tudásukat és esélyeiket. (– A Szerk.)

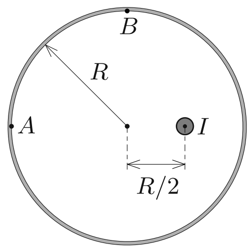
*a*) Készítsünk vázlatos rajzot a golyó optimális pályájáról! Indokoljuk is a rajzot!

*b*) Mekkora az a legkisebb hajítási sebesség, amellyel a $B$ pontot eltalálhatjuk?

**F2.** Egy igen hosszú, egyenes áramvezető huzalt átfűzünk egy hosszú, vékony falú, szupravezető anyagból készült, $R$ sugarú csövön. A huzal tengelye párhuzamos a cső tengelyével, a közöttük lévő távolság $R/2$. A huzalban folyó áram erőssége $I$.

*a*) Mekkora az áramvezető huzal egységnyi hosszára ható erő?

*b*) Mekkora a $J = I/\ell$ vonalmenti áramsűrűség a szupravezető cső belső felületén, az *ábrán* jelölt $A$ és $B$ pontokban?

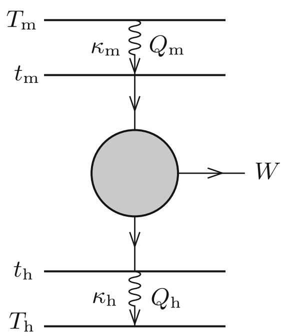



*c*) Mekkora a vonalmenti áramsűrűség a cső külső felületén?

*Útmutatás:* A szupravezető anyag belsejébe a mágneses tér nem hatolhat be.

**F3.** A valódi termodinamikai gépek hatásfoka általában jóval az ideális Carnot-hatásfok alatt marad. Ennek egyik fő oka, hogy Carnot-gép esetén feltételezzük, hogy minden termodinamikai folyamat nagyon lassan, reverzibilis módon megy végbe, míg valódi termodinamikai gépeknél a hőfelvételnél, hőleadásnál nagy szerepe van a hővezetésnek, ami *irreverzibilis* folyamat. Egy valódi termodinamikai gép működésekor szükségszerűen fellépnek belső disszipatív folyamatok is, amik rontják a hatásfokot.

A probléma modellezéséhez tekintsük az *ábrán* látható Carnot-hőerőgépet. A $t_\mathrm{m}$ és $t_\mathrm{h}$ „belső" hőmérsékletek ($t_\mathrm{h} < t_\mathrm{m}$) között egy „belső", reverzibilis Carnot-gép működik, mely hővezetés útján csatlakozik a $T_\mathrm{m} > t_\mathrm{m}$ hőmérsékletű meleg, illetve a $T_\mathrm{h} < t_\mathrm{h}$ hőmérsékletű hideg („külső") hőtartályokhoz. A hőtartályok és a belső Carnot-gép közötti hőáram erőssége (azaz a hőátadás üteme) a hőmérséklet-különbséggel arányos, az arányossági tényezők a meleg és a hideg oldalon rendre $\kappa_\mathrm{m}$, illetve $\kappa_\mathrm{h}$. A külső hőtartályok hőmérséklete állandónak tekinthető.

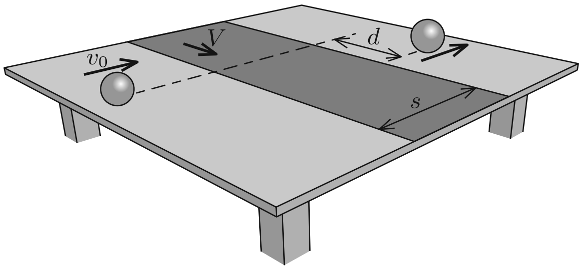



*a*) Adott külső hőmérsékletek mellett hogyan függ a Carnot-gép által szolgáltatott mechanikai teljesítmény a belső gép $\eta$ hatásfokától?

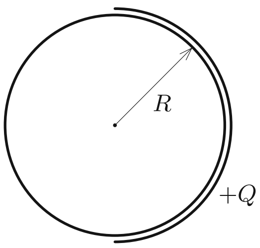
*b*) A belső gép milyen $\eta^*$ hatásfoka mellett maximális a gép által leadott mechanikai teljesítmény?

**A második elméleti forduló feladatai (2020. június 3.):**

**F4.** Egy vízszintes kísérletezőasztal középső sávját egy állandó $V$ sebességgel mozgó, $s$ szélességű (végtelenített) gumiszalag képezi, amely pontosan illeszkedik az asztallap nyugvó felületéhez. A futószalag szélére merőlegesen egy tömör gumilabdát indítunk tisztán gördítve $v_0$ kezdősebességgel. Azt tapasztaljuk, hogy amikor a labda a futószalag elhagyását követően már újra tisztán gördül, eredeti mozgásirányával párhuzamosan halad.




Mekkora $d$ távolsággal tolódott el a labda pályája a futószalaggal párhuzamos irányban? (A súrlódási együttható a vízszintes felületek és a labda között nagy, így a csúszva gördülő mozgások időtartama $s/v_0$-nál sokkal kisebb.)




**F5.** Egy vékony, fémből készült, $Q$ töltésű félgömbhéjat egy töltetlen, $R$ sugarú fémgömb közelébe viszünk az *ábrán* látható módon. A fémgömb sugara egy kicsit kisebb, mint a félgömbhéjé.

*a*) Adjuk meg a gömb és a félgömbhéj felületén kialakuló töltéseloszlást!

*b*) Mekkora a félgömbhéjra ható elektromos erő?

**F6.** Egy gömb alakú, $R$ sugarú bolygón a légkör törésmutatóját (a felszínhez közel) jó közelítéssel az

$$n(h) = n_0 \frac{R}{R+h},$$

formula adja meg, ahol $h$ a bolygó felszínétől mért magasság, $n_0$ állandó. Egy keskeny lézerfénynyalábot indítunk a felszíntől mért $h_0$ magasságból a vízszinteshez képest $\theta$ irányban a felszín felé.

*a*) Milyen alakú a fénynyaláb pályája?

*b*) Mennyi idő alatt éri el a fénynyaláb a bolygó felszínét? (A vákuumbeli fénysebesség $c$.)

*c*) Határozzuk meg a $\theta$ szöget, ha az a pont, ahol a fény eléri a bolygó felszínét pontosan az indítási pont alatt helyezkedik el!

## Tehetséggondozás
## Mérési szakkör a BME Fizikai Intézetében

A fizika iránt érdeklődő, tehetséges középiskolás diákok számára a BME Fizikai Intézet gyakorlati foglalkozásokat tart. A foglalkozásokon lehetőséget biztosítunk arra, hogy a tanulók mérőpárokban fizikai kísérleteket és méréseket végezhessenek. A foglalkozásokra októbertől kezdődően kéthetente, kedden 15.00-tól 18.00-ig kerül sor, összesen nyolc alkalommal. Információ: `http://mono.eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`

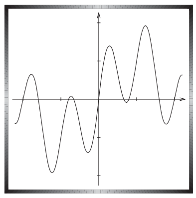
Az érdeklődők e-mail-ben jelentkezhetnek 2020. szeptember 30-ig az alábbi címen: `vanko@eik.bme.hu`

Elsősorban a gimnáziumok utolsó két évfolyamára járók jelentkezését várjuk. A jelentkezők írjanak pár sort magukról, ismertessék a fizika és a matematikai tanulmányaik során elért eredményeiket (versenyeredmények, KöMaL szereplés, stb.), és továbbtanulási elképzeléseiket.

A foglalkozások ingyenesek! Minden jelentkezőt e-mail-ben értesítünk (aki nem kap választ, küldje el még egyszer a jelentkezését).

**Vankó Péter**

## Anharmonikus rezgések periódusideje



Ha egy egyensúlyi helyzetéből kimozdított testet visszahúzó erő a Hooke-törvényt követi, azaz a kitéréssel arányos, a test harmonikus rezgőmozgást végez. Ennek egyik fontos jellegzetessége, hogy a rezgés ideje nem függ a kitérítés nagyságától. A valóságban azonban az erőtörvény mindig csak bizonyos határok között, valamilyen közelítésben tekinthető lineárisnak. Bizonyos esetekben ezek a határok lehetnek egészen tágak (pl. a direkt erre a célra készített rugalmas eszközök esetén), máskor el kell fogadnunk, hogy a vizsgált periodikus mozgás csak nagyon kicsiny amplitúdó esetén tekinthető harmonikusnak (ilyen pl. az inga mozgása, és általában az összetett rendszerek egyensúly körüli rezgései). Úgy is mondhatjuk, hogy ezekben az esetekben a harmonikus közelítés csak az első közelítés, ami tovább finomítható. Az anharmonikus rezgések periódusideje már nem független az amplitúdótól, de az első korrekció meglepően könnyen kiszámítható. A továbbiakban ezt fogjuk bemutatni egy egyszerű, ámde könnyen általánosítható példán.

Először elevenítsünk fel néhány dolgot, amit a harmonikus rezgésekről tudunk! Ha egy test mozgását az

$$ma = -Dx \tag{1}$$

mozgásegyenlet írja le (amelyben $m$ a test tömege, $a$ a gyorsulása, $x$ egy adott ponthoz viszonyított kitérése és $D$ egy pozitív állandó), akkor ez a test harmonikus rezgőmozgást végez. Erre jellemző, hogy a kitérést, a mozgás sebességét és a gyorsulást rendre az

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{2}$$

$$v = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{3}$$

és az

$$a = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4}$$

függvények adják meg. Ezekben $A$ a rezgés amplitúdója, az $\omega_0$ körfrekvencia $\omega_0 = \sqrt{D/m}$, a $\varphi_0$ szöget pedig a test $t = 0$ időpontban elfoglalt helyzete határozza meg. A rezgés periódusideje $T_0 = 2\pi/\omega_0$. A későbbiekben fontos összefüggés lesz az energiamegmaradás törvénye, ezért érdemes felidéznünk, hogy ha egy testet $F(x) = -Dx$ erő húz vissza, akkor ezen erővel szemben $V(x) = Dx^2/2$ munkát kell végeznünk, hogy a testet az origóból az $x$ pozícióba vigyük. (Ezt úgy szoktuk mondani, hogy az $F(x)$-nek a $V(x)$ a potenciálja. Azzal, hogy ez mit is jelent pontosan, a Függelékben még foglalkozunk.) Ennek segítségével az energia mérlegegyenlete:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}DA^2. \tag{5}$$

Következő lépésként egy anharmonikus esetet próbálunk leírni. Bár nem minden egyensúlyi helyzet szimmetrikus (vagyis $F(-x) = -F(x)$ tulajdonságú erőtörvénynek megfelelő), mi most csak ilyet vizsgálunk, ezek közül is a legegyszerűbbet vesszük. Ebben a kitérített testet visszahúzó erőt egy harmadfokú kifejezés adja meg, tehát a mozgásegyenlet

$$ma = F^*(x) = -Dx - D^*x^3. \tag{6}$$

Itt $D^*$ előjele nincs megkötve, és feltételezzük, hogy az anharmonikus $D^*x^3$ tag az egész mozgás során kicsiny az előtte állóhoz viszonyítva, azaz $\frac{|D^*|}{D}A^2 \ll 1$. A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, milyen mértékben változtatja meg ez a tag a rezgésidőt. Először két egyszerű, a harmonikushoz hasonló közelítéssel próbálkozunk.

1) A harmonikus rezgés esetén $a_{\max} = A\omega^2$. Ennek analógiájára a (6) egyenletből az

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 + bA^2} \tag{7}$$

érték adódik, ahol $b = D^*/D$.

2) A harmonikus rezgés során $v_{\max} = A\omega$. Kiindulhatunk ebből az összefüggésből is! Ahogy azt a Függelékben bemutatjuk, a (6) egyenletben szereplő $F^*(x)$ erőhöz tartozó potenciál

$$V^*(x) = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{4}D^*x^4,$$

tehát az energiamegmaradás egyenlete most

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{4}D^*x^4 = \frac{1}{2}DA^2 + \frac{1}{4}D^*A^4. \tag{8}$$

A $v_{\max}$ sebességet ebből számolva az

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{bA^2}{2}} \tag{9}$$

kifejezés adódik. Tanulságos megnéznünk azokat a *harmonikus* potenciálokat, amelyekben az $m$ tömegű próbatestünk $\omega_1$, illetve $\omega_2$ körfrekvenciával rezegne. Ezek rendre

$$V_1(x) = \frac{1}{2} D\big(1 + bA^2\big)x^2 - \frac{1}{4} D^* A^4$$

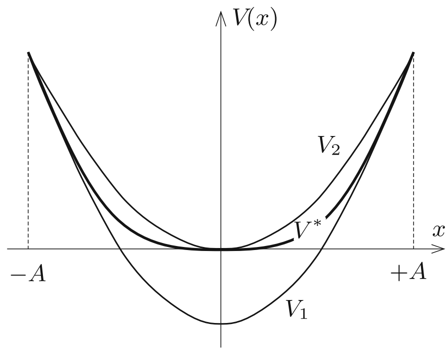
és

$$V_2(x) = \frac{1}{2} D \left(1 + \frac{bA^2}{2}\right) x^2.$$

A potenciálokhoz tetszőleges konstansokat hozzá lehet adni, ezek az energiamérlegből úgyis kiesnek. Mi most úgy választottuk meg a potenciális energiák nullpontját, hogy

$$V_1(\pm A) = V^*(\pm A) = V_2(\pm A) \tag{10}$$

legyen. A három potenciál jellegét $D^* > 0$ esetén az *ábra* mutatja.




Fontos észrevétel, hogy a szélső ($\pm A$) pontokban $V_1$ érintője is megegyezik $V^*$-éval, hiszen itt a potenciálfüggvény meredeksége az erővel, az pedig a test maximális gyorsulásával arányos, és $V_1$ paraméterét éppen úgy választottuk meg, hogy a test legnagyobb gyorsulása ugyanannyi legyen a két esetben. Ez nem igaz $V_2$-re, de $V_2$ és $V^*$ érintik egymást az origóban, ami a maximális sebességek összehangolásának következménye.

Jól látszik, hogy a $-A \leqslant x \leqslant A$ szakaszon a $V_1$ és $V_2$ közrefogja a $V^*$-ot, pl. $D^* > 0$ mellett

$$V_1(x) \leqslant V^*(x) \leqslant V_2(x), \qquad \text{ha} \quad -A \leqslant x \leqslant A,$$

és a viszony pont fordított, ha $D^* < 0$. Ugyanakkor (10) miatt

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1(x) = \frac{1}{2}mv^2 + V^*(x) = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2(x),$$

tehát a pálya bármely adott pontjában $D^* > 0$ mellett

$$|v_1| \geqslant |v| \geqslant |v_2|,$$

aminek egyenes következménye, hogy a tényleges rezgésidőre fennáll, hogy

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} < T < T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, \qquad \text{ha} \quad D^* > 0,$$

és a sorrend pont fordított az ellenkező esetben:

$$T_1 > T > T_2, \qquad \text{ha} \quad D^* < 0.$$

Joggal vetődik fel, hogy most melyik érték áll közelebb a valódihoz. Az a meglepő válasz, hogy a kettő számtani közepe, vagyis

$$T \approx \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{11}$$

mindkettőnél sokkal jobb közelítés. A továbbiakban ezt fogjuk bemutatni, és becslést adunk (11) pontosságára is.

A rezgésidő kiszámítására kézenfekvőnek tűnik, hogy a $(-A, +A)$ szakaszt kicsiny $\Delta x_i$ szakaszokra osztjuk, és felösszegezzük azokat a $\Delta t_i$ időket, amelyek a kis szakaszok megtételéhez kellenek:

$$T = 2\sum_i \Delta t_i = 2\sum_i \frac{\Delta x_i}{v_i}.$$

(Az ehhez szükséges sebességeket az energiamegmaradásból számíthatjuk ki.) Ezzel azonban vigyáznunk kell, mert a szélső helyzetekhez közeledve a test nagyon lelassul, nagyon kicsiny sebességértékek kerülnek a nevezőbe, és ügyeskednünk kell, hogy az összeg értékét kellő pontossággal tudjuk meghatározni. Szerencsére ezt a problémát meg tudjuk kerülni, ha figyelembe vesszük, hogy a rezgés mégiscsak egy periodikus mozgás, azaz a kitérés megadható az

$$x(t) = A\sin\varphi(t)$$

alakban. Itt $\varphi(t)$ az idő monoton növekedő függvénye, és a mozgás periodikusságát az fejezi ki, hogy

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi,$$

de olyan szimmetrikus rezgés esetén, mint amit most vizsgálunk, az ennél szigorúbb

$$\varphi(t+T/2) = \varphi(t) + \pi$$

feltétel is teljesül. A $\varphi(t)$ növekedési ütemét egy pillanatnyi szögsebességgel lehet megadni. Ennek definíciója a pillanatnyi sebesség analógiájára

$$\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}, \qquad (\Delta t \to 0).$$

(Ezt úgy kell értenünk, hogy miközben $\Delta t$-nek egyre kisebb értékeket választunk, aközben a számláló is egyre kisebb lesz, a kettő hányadosa viszont egy konkrét értékhez közeledik. Ahogy az út – idő grafikon érintőjének a meredeksége a pillanatnyi sebesség, úgy a $\varphi(t)$ grafikon érintőjének a meredeksége az $\omega(t)$ pillanatnyi szögsebesség.) A rezgés pillanatnyi sebességét annak definíciójából kiindulva határozzuk meg:

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{A\sin(\varphi + \Delta\varphi) - A\sin\varphi}{\Delta t} = A\frac{\sin\Delta\varphi\cos\varphi - (1-\cos\Delta\varphi)\sin\varphi}{\Delta t}.$$

Mivel kicsi $\Delta\varphi$ esetén $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, továbbá

$$1 - \cos(\Delta\varphi) = 2\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx (\Delta\varphi)^2/2,$$

a sebességet megadó képletben a számláló második tagja jóval kisebb, mint az első, ezért elhagyható, a maradék pedig a

$$v(t) = A\omega(t)\cos\varphi(t) \tag{12}$$

kifejezést adja. Ez nagyon hasonlít a harmonikus rezgés sebességére, de vigyázzunk, az analógia *nem* teljes, mert a gyorsulás

$$a(t) \neq -A\omega^2(t)\sin\varphi(t).$$

Ahogy a $v$ sebesség, úgy az $\omega$ pillanatnyi szögsebesség is kifejezhető az energiamegmaradás (8) egyenlete segítségével. Az ebből adódó

$$v = \omega_0\sqrt{(A^2 - x^2)\left(1 + \frac{b(A^2 + x^2)}{2}\right)}$$

kifejezésből egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\omega(t) = \omega_0\sqrt{1 + \frac{bA^2\big(1 + \sin^2\varphi(t)\big)}{2}}.$$

Vegyük észre, hogy a szögsebesség az időtől csak a $\varphi$-n keresztül függ, tehát nyugodtan írhatjuk, hogy

$$\omega(\varphi) = \omega_0\sqrt{1 + \frac{bA^2(1 + \sin^2\varphi)}{2}}.$$

Most már fel tudjuk írni a rezgésidőt olyan összeg formájában, amely esetében nem kell attól tartanunk, hogy a nevezőbe eltűnő mennyiség kerül. Ha a $2\pi$ tartományt kicsiny $\Delta\varphi_i$ szakaszokra osztjuk, és $\varphi_i$-nek a megfelelő szakasz egy pontját (mondjuk a felezőpontját) választjuk, akkor az adott szakasz „megtételéhez” szükséges idő $\Delta t_i \approx \Delta\varphi_i/\omega(\varphi_i)$, azaz

$$T = \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega(\varphi_i)} = \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_0}\left(1 + \frac{bA^2(1 + \sin^2\varphi_i)}{2}\right)^{-1/2}.$$

Az összegzés (integrál) kellő matematikai felkészültséggel egzakt módon is elvégezhető, de mi most sokkal kevesebbel is beérjük: megelégszünk azzal, hogy kiszámítsuk a $T$-hez a $bA^2$ paraméterben legalacsonyabb rendű korrekciót. Ezt a megfelelő $\sqrt{(1+y)} \approx 1 + y/2$ és $(1+y)^{-1} \approx 1 - y$ közelítésekkel átalakított

$$T \approx \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_0}\left(1 - \frac{bA^2(1 + \sin^2\varphi_i)}{4}\right)$$

formula adja meg, ami a $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ helyettesítés után

$$T \approx \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_0}\left(1 - \frac{3}{8}bA^2 + \frac{1}{8}bA^2\cos 2\varphi_i\right).$$

Látható, hogy a zárójelben a harmadik tag az összegzésben nullát ad (mert ugyanannyi a pozitív és a negatív járulék), a többi pedig egyszerűen szorzódik az intervallum $2\pi$ hosszával, így

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{3}{8}bA^2\right) = T_0\left(1 - \frac{3}{8}bA^2\right). \tag{13}$$

Összehasonlításképpen $T_1$ és $T_2$ ugyanilyen pontossággal (ugyanazon $\sqrt{1+y} \approx$ $\approx 1 + y/2$ és $(1+y)^{-1} \approx 1 - y$ közelítéseket alkalmazva):

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1+bA^2}} \approx T_0\left(1 - \frac{1}{2}bA^2\right), \tag{14}$$

illetve

$$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1+bA^2/2}} \approx T_0\left(1 - \frac{1}{4}bA^2\right), \tag{15}$$

tehát valóban fennáll, hogy nagyon jó közelítéssel

$$T \approx \frac{T_1 + T_2}{2}. \tag{16}$$

Szólnunk kell még az eredményünk pontosságáról. Számolásainkban az egyhez képest kis paraméter a $bA^2$ mennyiség. Ahogy azt a Függelékben bemutatjuk, az alkalmazott formulák az ott $y$-nal jelölt kis paraméterben első rendig pontosak, az elhanyagolt tagok közül a legnagyobb $y^2$ nagyságrendű. Esetünkben ez azt jelenti, hogy az eredményünk hibája kb. $\left(bA^2\right)^2$. Ezt úgy szoktuk jelölni, hogy

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} + \mathcal{O}(A^4), \tag{17}$$

ahol az $\mathcal{O}(A^4)$ (olvasd: ordó $A$ a negyediken) olyan – pontosabban, számszerűen nem részletezett – tagokat jelent, amelyek legfeljebb $A^4$ nagyságrendűek. (Az *ordo* latin szó, jelentése: *rend.*) Ezekben természetesen az $A$ különböző hatványai mellett olyan ($A$-tól független) szorzótényezők állnak, amelyekkel együtt minden tag ugyanolyan dimenziójú, de ezek az együtthatók minden konkrét feladatban adottak, tehát a nagyságrendet maga az $A$ hatványkitevője határozza meg. Összefüggésünk ebben a formában általánosnak tekinthető minden szimmetrikus anharmonikus rezgésre. Gondoljuk csak meg, ha az erőhöz hozzáadunk egy $x^5$-nel (azaz a potenciálhoz egy $x^6$-nal) arányos tagot, attól még a számolás ugyanígy elvégezhető, és arra az eredményre vezet, hogy a $T$, $T_1$ és $T_2$ csak $A^4$ nagyságrendű tagokkal módosul. Nem nő a korrekciók nagyságrendje akkor sem, ha az erőhöz (potenciálhoz) további, még gyorsabban eltűnő tagokat adunk, tehát ezek a (17) összefüggés tartalmát már nem változtatják meg.

*Megjegyzés.* A leírt eljárás pontosságának érzékeltetésére tekintsünk egy konkrét példát! Legyen mondjuk $D=0{,}1$ N/cm és $D^*=10^{-4}$ N/cm$^3$, vagyis $b=10^{-3}$ cm$^{-2}$. Ha a rezgés amplitúdója $A=10$ cm, akkor $bA^2=0{,}1$. Ez annyit jelent, hogy a legnagyobb kitérésnél az erő képletében az anharmonikus tag 10-szer kisebb, mint a Hooke-törvénynek megfelelő harmonikus tag. A rezgő test $m$ tömege meghatározza a nagyon kicsi kitérésekhez tartozó $T_0$ rezgésidőt, ennek számszerű értékére a relatív eltérések számításánál nincs szükségünk.

A (14), (15) és (16) összefüggéseknek megfelelően a harmonikus mozgással közelített rezgések periódusideje:

$$T_1=\frac{1}{\sqrt{1+0{,}1}}\,T_0=0{,}9535\,T_0,$$

$$T_2=\frac{1}{\sqrt{1+0{,}05}}\,T_0=0{,}9759\,T_0,$$

és ezek számtani közepe

$$T_{\text{átlag}}=0{,}9647\,T_0.$$

Másrészt az $\omega(\varphi)=\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1+0{,}05(1+\sin^2\varphi)}$ függvény reciprokának integrálásával (pl. a `www.wolframalpha.com` segítségével) megkaphatjuk az anharmonikus rezgések „pontos” periódusidejét:

$$T=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\omega(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{T_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+0{,}05(1+\sin^2\varphi)}}\,\mathrm{d}\varphi=0{,}9645\,T_0.$$

Ezekből a számokból leolvasható, hogy $T_1$ és a pontos érték relatív eltérése $-1{,}14\%$, ugyanez $T_2$-nél $+1{,}18\%$, míg az átlagolt közelítő rezgésidőre a relatív eltérés mindössze $2\cdot10^{-4}$.

## Függelék

### 1. Erők és potenciálok egy dimenzióban

Ha egy esetben az erő kizárólag a helytől függ (azaz nem függ pl. a mozgásállapottól), tehát $F=F(x)$, akkor ebben a rendszerben definiálható a $V(x)$ helyzeti energia, más néven potenciális energia, vagy egyszerűen potenciál. Ez a fizikai mennyiség megegyezik azzal a munkával, amit az $F(x)$ *ellenében* kell végeznünk, ha a testet egy előre kiválasztott $x_0$ pontból az $x$ pontba visszük. A kiszámításához az $(x,x_0)$ szakaszt $x_i$ osztópontokkal olyan kicsiny szakaszokra vágjuk, hogy azokban az erő egy-egy szakaszon belül már állandónak vehető legyen, és a potenciált a

$$V(x)=\sum_i -F(x_i')\Delta x_i \tag{F. 1}$$

összeg adja meg. Itt az $x_i'$ a $\Delta x_i=(x_{i+1}-x_i)$ előjeles (irányított) szakasz egy pontja. Nyilván, ha az $a$ koordinátájú pontból visszük a testet a $b$ koordinátájú pontba, akkor $W(b,a)=V(b)-V(a)$ munkát kell végeznünk. Jól látszik, hogy a $V(x)$-hez hozzáadhatunk egy tetszőleges $x$-független értéket, mert az az energiaváltozásból úgyis kiesik. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy ha az eredő erőt több erő összege adja meg, az eredő potenciál az egyes erőkhöz tartozó potenciálok összege lesz. A potenciál konstrukciójából következik, hogy

$$F(x) = -\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x}, \tag{F. 2}$$

ha $\Delta x$ nagyon kicsi. (A differenciálszámításban jártasak felismerik: $F(x)$ a $-V(x)$ függvény deriváltja.)

Ennek alapján pl. könnyen belátható, hogy ha az erő $F = -kx^3$ alakú, akkor a hozzá tartozó potenciál $V = (kx^4)/4$ szerint függ az $x$-től:

$$\frac{k}{4}\frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \frac{k}{4}\big(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\big).$$

(Ezt a kifejezést a binomiális tétel alkalmazásával kaptuk.) Ha $\Delta x$-et egyre kisebbnek („végtelenül kicsinek") választjuk, a zárójelben csak az első tag marad véges, tehát az erő valóban $-kx^3$.

*Megjegyzés.* A fenti megfontolás (miszerint az erőfüggvény mindig egy potenciálfüggvényből származtatható deriválással) csak egydimenziós erőtereknél érvényes. Két- vagy háromdimenziós erőtereknél (ha azok „nem konzervatívak", más náven: örvényesek) előfordulhat, hogy potenciálfüggvény nem létezik.

## 2. Két közelítő formula és ezek pontossága

**2/1.** A geometriai sor összegképlete szerint $|y| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n.$$

Ha $|y| \ll 1$, az egymást követő tagok lényegesen kisebbek, mint a megelőző tag. Akkor, ha valahol „levágjuk" az összeget, az ezzel elkövetett hiba nagyságrendje azonos az első elhanyagolt tag nagyságrendjével. Így az

$$\frac{1}{1+y} \approx 1 - y \tag{F. 3}$$

közelítés hibája $y^2$ nagyságrendű. Fontos megjegyeznünk, hogy itt a nagyságrend nem egyszerűen azt jelenti, hogy „nagyjából akkora (jelen esetben: olyan kicsi), mint", hanem – függvényről lévén szó – azt is, hogy „körülbelül úgy viselkedik, mint". Esetünkben a hiba pontosan $y^2/(1+y)$, de mivel kicsi $y$ esetén az $1/(1+y)$ lassan változik, a hiba viselkedésének a jellegét is az $y$ hatványkitevője határozza meg.

**2/2.** Egy másik közelítő képlet, amit gyakran használunk, a $\sqrt{1+y}$-re vonatkozik. Itt a következő átalakítással élünk:

$$\sqrt{1+y} = \sqrt{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \left(1+\frac{y}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{(y/2)^2}{(1+y/2)^2}}. \tag{F. 4}$$

Látni való, hogy gyök alatt egy ugyanolyan típusú kifejezés (az egy mellett egy kicsi tag) szerepel, mint a kiinduló kifejezésben, ráadásul ez közelebb van az egyhez, mint az eredeti. Így az eljárás akárhányszor megismételhető, ezzel egyre több tényező hozható ki a gyök alól úgy, hogy közben az ott maradó kifejezés egyre jobban megközelíti az egyet. Mi most nem ezt az utat választjuk, hanem megelégszünk azzal, hogy megbecsüljük a

$$\sqrt{1+y} \approx 1+\frac{y}{2} \tag{F. 5}$$

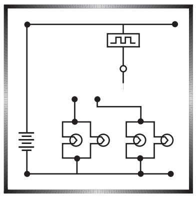
első közelítés hibáját. Ez

$$\left(1+\frac{y}{2}\right)-\sqrt{1+y}=\frac{(y/2)^2}{(1+y/2)+\sqrt{1+y}}.$$

Ha most $|y| \ll 1$, a jobb oldal nevezője egy 2-höz közeli szám, vagyis (F. 5) hibája is $y^2$ nagyságrendű.

**Woynarovich Ferenc**
Budapest

## Fizika gyakorlatok megoldása



**G. 693.** *Két teljesen hasonló vonat két párhuzamos vágányon halad egymással szemben állandó (de nem feltétlenül azonos nagyságú) sebességgel. A mozdonyok ugyanolyan hosszúságúak, mint a kocsik. Mindkét vonat* 19 *kocsiból és a mozdonyból áll, amely vontatja a szerelvényt. Az egyik vonaton Piri elölről a harmadik kocsiban utazik. Miután a két vonat találkozik, Piri kocsija* 36 *másodperc múlva kerül teljes terjedelmében Dani szemből jövő kocsija mellé, és ezt követően újabb* 44 *másodperc telik el, amíg a két vonat teljesen elhalad egymás mellett. Elölről hányadik kocsiban utazik Dani?*

(*4 pont*) Közli: *Székely Zoltán,* Székelyudvarhely

**Megoldás.** Rögzítsük a koordináta-rendszerünket ahhoz a vonathoz, amelyikben Dani utazik. Innen nézve ez a vonat áll, Piri vonata pedig mozog. Tudjuk, hogy az utóbbi vonat 36 s + 44 s = 80 s alatt halad el Dani vonata mellett, vagyis ennyi idő alatt teszi meg a két vonat 40 kocsihossznyi távolságát. Ezek szerint a két vonat egymáshoz viszonyított (relatív) sebessége

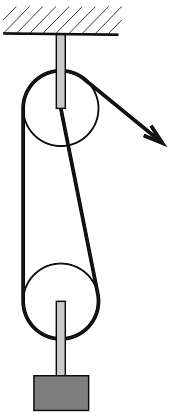
$$v=\frac{40\ \text{kocsihossz}}{80\ \text{s}}=0{,}5\ \frac{\text{kocsihossz}}{\text{s}}.$$

Piri kocsija $t=36$ s alatt $s=vt=18$ kocsihossznyi távolságot tesz meg. Piri kocsijától a másik szerelvény első kocsija 4 kocsinyi távolságra van, mert közöttük

2 mozdony és 2 vasúti kocsi található. A 18 kocsitávolságból ezt a 4-et levonva megkapjuk, hogy Dani a másik szerelvény 14. kocsijában utazik.

*Czirók Tamás* (Budapest, Eötvös J. Gimn., 9. évf.)

65 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 26, hiányos (1–2 pont) 20 dolgozat.



**G. 701.** *Mekkora az* ábrán *látható két csiga fordulatszámának aránya, ha a sugaruk megegyezik? (A csigák közötti kötéldarabok függőlegesnek tekinthetők.)*

(*3 pont*)

**Megoldás.** Mialatt a felső (álló-) csiga egyet fordul, addig az alsó (mozgó-) csigát tartó bal oldali kötélből is egy kerületnyi jön feljebb, azaz a mozgócsiga két oldalán lévő kötelekből fél-fél kerületnyi fog „hiányozni". A mozgócsiga középpontja eszerint fél kerületnyivel kerül feljebb, tehát a mozgócsiga egy felet fordul. A fordulatszámok aránya:

$$\frac{f_{\text{mozgócsiga}}}{f_{\text{állócsiga}}}=\frac{1}{2}.$$

*Schmercz Blanka* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)

40 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 5, hiányos (1 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

**G. 704.** *Ha a Torricelli-kísérletet a tengerszinten végezzük el, akkor az üvegcsőben* 76 cm *magasra emelkedik a higany. Egy igen magas hegyen azonban csak* 40 cm-*es higanyoszlop-magasságot mérünk. Milyen magas lehet a hegy?*

(*3 pont*)

**Megoldás.** A Torricelli-kísérletben a higanyoszlop magassága a külső légnyomással arányos. (A nyomás régebben használt egysége a Hgmm, ami 1 mm magas higanyoszlop nyomásával egyezik meg.) A megadott számadatok mellett

$$\frac{p_{\text{hegyen}}}{p_{\text{tengerszinten}}}=\frac{40}{76}\approx 0{,}53.$$

Ismert, hogy a légnyomás 5,5 km-enként kb. a felére csökken. (*Forrás:* `https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/termeszettudomanyok/fizika/fizika-7-evfolyam/a-legnyomas/a-legnyomas-valtozasa`) Mivel esetünkben a nyomások aránya kicsit több, mint $\frac{1}{2}$, ezért a hegy 5500 m-nél kicsit alacsonyabb, 5000 m körüli lehet. Ez mindenképpen csak egy becslés, mert a légnyomás az időjárási viszonyoktól és a hőmérséklettől is függ.

*Cynolter Dorottya* (Budapest, Veres Pálné Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

55 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 34, hibás 5 dolgozat.

# Fizika feladatok megoldása

**P. 5184.** *Egy nagy felbontású optikai rács a merőlegesen ráeső lézersugarat már első rendben* 45°*-os szögben képes eltéríteni. Mi történik, ha az eltérített lézersugár útjába egy másik, ugyanilyen optikai rácsot helyezünk*

*a) az eredeti ráccsal párhuzamosan;*

*b) az eredeti rácsra merőlegesen?*

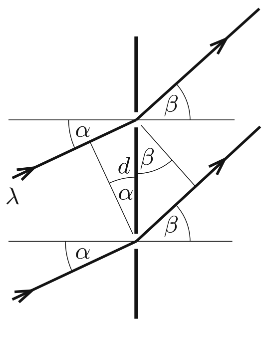
*(A két rács rései mindkét esetben párhuzamosak egymással.)*

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

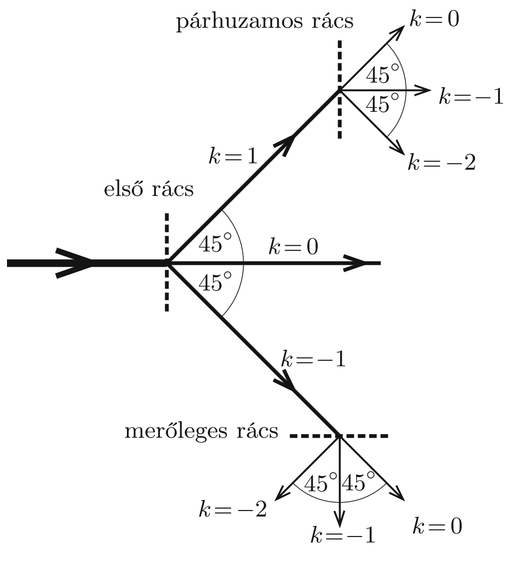
**Megoldás.** Írjuk fel tetszőleges $\alpha$ beesési szögre a kilépő sugarak $\beta$ szögét megadó hullámerősítési feltételt. Ha $d$ a rácsállandó és $\lambda$ a lézerfény hullámhossza, akkor a szomszédos résekből érkező fény útkülönbsége (lásd az *1. ábrát*):

$$d\sin\beta - d\sin\alpha = k\lambda. \tag{1}$$

($k$ az elhajlás rendjét megadó egész szám.)




*1. ábra*




*2. ábra*

Az első rácsnál $\alpha = 0$, és mivel $k = \pm 1$-nél $\beta = \pm 45°$, ebből

$$\lambda = d\sin 45° = \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

következik.

A második rácsnál – akár párhuzamosan, akár merőlegesen áll az az első rácshoz képest – a beesési szög $\alpha = 45°$, az (1) egyenlet tehát így alakul:

$$d \sin\beta - d \sin 45° = k\lambda,$$

vagyis (2)-t is kihasználva

$$\sin\beta = \frac{k+1}{\sqrt{2}}$$

adódik. Nyilván teljesül, hogy $|\sin\beta| \leqslant 1$, vagyis

$$k \leqslant \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41 \quad \text{és} \quad k \geqslant -\big(1 + \sqrt{2}\,\big) \approx -2{,}41.$$

De mivel $k$ egész szám, az elhajlás rendje csak $k = 0$, $k = -1$ és $k = -2$ lehet. A megfelelő elhajlási szögek: $\beta = 45°$, $\beta = 0$ és $\beta = -45°$.

Az eltérített lézerfény „útját" (vázlatosan) a *2. ábra* mutatja.

*Fülöp Sámuel Sihombing* (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

7 dolgozat érkezett. Helyes Fülöp Sámuel Sihombing és Selmi Bálint megoldása. Hiányos (1–3 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

**P. 5208.** *Egy* 0,6 kg *tömegű kosárlabda* 1,05 m*-ről elengedve* 0,57 m*-re pattan vissza.*

*a) Mennyi a mechanikai energiaveszteség a padlóval való ütközés miatt?*

*b) Mekkora a visszapattanás és a földet érés sebességének aránya? (Ezt az arányszámot ütközési számnak nevezik.)*

*c) Az energiaveszteség kompenzálására a játékosok a labdát pattogtatni szokták, azaz rövid ideig lefelé nyomják. Tegyük fel, hogy a játékos a labdát* 1,05 m*-ről indítva* 0,08 m *hosszon nyomja lefelé. Mekkora átlagos erőt fejt ki a játékos a labdára, ha az most újra* 1,05 m*-re pattan vissza?*

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

**Megoldás.** *a*) A mechanikai energiaveszteség az elengedési ($H$) és a visszapattanási ($h$) magassághoz tartozó helyzeti energiák különbségével egyenlő:

$$\Delta W = mg(H - h) \approx 2{,}8\ \text{J}.$$

*b*) A sebességek aránya:

$$k = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H}} = 0{,}74.$$

*c*) A visszapattanó labda akkor emelkedig $H$ magasságra, ha a pattanás utáni sebessége $\sqrt{2gH}$, a visszapattanás előtti sebessége tehát:

$$v = \frac{\sqrt{2gH}}{k} \approx 6{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Felírhatjuk a munkatételt. Az $mg$ nehézségi erő $H=1{,}05$ m úton, a játékos által kifejtett $F$ erő pedig $s=0{,}08$ m úton végez munkát:

$$mgH+Fs=\frac{1}{2}mv^2.$$

Innen

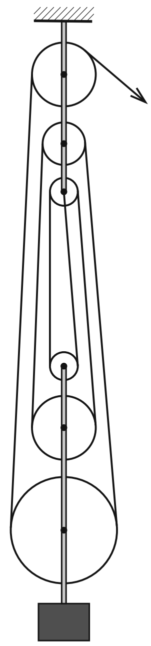
$$F=\frac{mv^2-2mgH}{2s}\approx 65\ \mathrm{N}.$$

Tehát a játékos által a labdára kifejtett *átlagos* erő kb. 65 N.

*Bonifert Balázs* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

65 dolgozat érkezett. Helyes 33 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 24, hiányos (1–2 pont) 8 dolgozat.

**P. 5209.** *Az* ábrán *látható csigasorban a legfelső állócsiga* 15 cm, *a legalsó mozgócsiga pedig* 25 cm *sugarú. A mozgócsigák mindegyike* 15*-öt fordul percenként, és az állócsigák fordulatszáma is megegyezik egymással. (A csigák közötti kötéldarabok függőlegesnek tekinthetők.)*



*a*) *Mekkora a többi csiga sugara?*

*b*) *Mekkora az állócsigák fordulatszáma?*

(*4 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy húzás közben az állócsigák $x$-szel magasabbra kerülnek. Ez azt jelenti, hogy a csigák közötti kötél teljes hossza $6x$-szel rövidebb lesz, hiszen mind a 6 kötéldarab hossza $x$-szel csökken. Eközben a legfelső állócsigán $6x$ hosszú kötél halad át. A legalsó állócsigán $x$-szel kevesebb, $5x$, mert ez a csiga közben $x$-szel magasabbra is kerül. A (fentről számított) második állócsigán ugyanilyen okból $4x$, a második mozgócsigán $3x$, a harmadik állócsigán $2x$, a harmadik mozgócsigán pedig $x$ hosszúságú kötél halad át.

*a*) A fordulatszám egyenesen arányos az áthaladó kötél hosszával és fordítottan arányos a sugárral, így a második mozgócsiga sugara $25\ \mathrm{cm}\cdot\frac{3x}{5x}=\ 15$ cm, a harmadik, legfelső mozgócsigáé $25\ \mathrm{cm}\cdot\frac{x}{5x}=5$ cm, mert a fordulatszámaik megegyeznek. A második állócsiga sugara $15\ \mathrm{cm}\cdot\frac{4x}{6x}=10$ cm, a harmadik, legalsó állócsigáé $15\ \mathrm{cm}\cdot\frac{2x}{6x}=5$ cm, mert az állócsigák fordulatszáma is egymással megegyezik.

*b*) A legfelső mozgócsiga 15-öt fordul percenként, sugara ugyanakkora, mint a legalsó állócsigáé, 5 cm, de azon egységnyi idő alatt kétszer olyan hosszú kötél halad át, úgyhogy fordulatszáma is szükségképpen kétszer akkora, 30 fordulat percenként.

*Jánosik Máté* (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

12 dolgozat érkezett. Helyes Hamar Dávid, Jánosik Máté, Ludányi Levente, Páhán Anita Dalma és Somlán Gellért megoldása. Hiányos (1–3 pont) 2, hibás 5 dolgozat.

## Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

**2020. október 9-én**

pénteken délután $15^{\mathrm{h}}$-tól $20^{\mathrm{h}}$-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

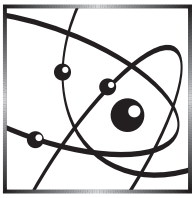
A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de hagyományos (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.

A helyszínek és a versennyel kapcsolatos minden további információ megtalálható a verseny honlapján:

`http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

**Versenybizottság**



## Fizikából kitűzött feladatok

**M. 397.** Gyertyával bekormozott fémlemez hőmérsékletét mérve határozzuk meg, hogy mennyi energia érkezik a Napból egységnyi idő alatt a sugárzásra merőleges, egységnyi nagyságú felületre! (A fémlemez anyagának fajhőjét vegyük táblázatból.)

(*6 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest

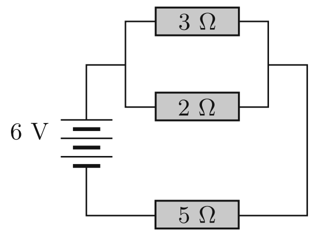
**G. 713.** Egy 80 kg tömegű fizikatanár 6 méter hosszú és 40 kg tömegű, erős pallóból olyan kétoldalú emelőt készít, amivel a diákjainak bemutatja, hogy akár egy 500 kg tömegű terhet is fel tud vele emelni. Hová helyezze az emelő alátámasztását, ha a terhet maximális magasságba akarja juttatni úgy, hogy teljes súlyával óvatosan ránehezedik a palló végére? A teher tömegközéppontján áthaladó függőleges egyenes 20 cm távol van a palló végétől.

(*4 pont*)

**G. 714.** A Föld jégsapkái és gleccserei jelenleg mintegy 30 000 000 $km^3$ jeget tartalmaznak. Becsüljük meg, hogy nagyjából mennyivel emelkedne a tengerek és az óceánok vízszintje, ha ez a hatalmas mennyiségű jég mind elolvadna!

(*3* pont)

**G. 715.** Egy áramkör három ellenállásból és egy telepből áll az *ábrán* látható módon.




*a*) Mekkora az egyes ellenállásokon átfolyó áram és a rajtuk eső feszültség?

*b*) Hogyan változnak ezek az értékek, ha a két párhuzamos ellenállás mellé még bekötünk rengeteg („végtelen sok") 1 kΩ-os ellenállást párhuzamosan?

*c*) Mekkora lesz az eredeti áramkör három ellenállásának árama és feszültsége, ha az 5 kΩ-os ellenállás mellé bekötünk még rengeteg („végtelen sok") 1 kΩ-os ellenállást sorosan?

(*4 pont*)

**G. 716.** Egy ágyúból kilőtt gránát pályájának legfelső pontján 100 m/s sebességgel haladva két egyforma tömegű darabra robban szét. Az egyik darab 50 m/s sebességgel függőlegesen felfelé indul el. Milyen irányba és mekkora sebességgel indul el a másik darab? (A gránátban lévő robbanóanyag tömege elhanyagolható.)

(*3 pont*)

**P. 5240.** Hány liter levegő szorul ki egy 6 m × 5 m × 3 m-es helyiségből, ha a levegő hőmérséklete 27 °C-ról 30 °C-ra emelkedik, a nyomás pedig 0,5%-kal csökken?

(*3* pont) *Példatári feladat nyomán*

**P. 5241.** Az erős délnyugati szél hatására 1962. május 14-én 9 óra alatt 45 cm-rel csökkent Keszthelynél a Balaton vízszintje, amíg Alsóörsnél 51 cm-t emelkedett. Adjunk nagyságrendi becslést a szélnek a víz emelésére fordított teljesítményére! (Becslésünkhöz felhasználhatjuk az interneten elérhető adatokat is.)

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

**P. 5242.** Egy felhőben 2 mm átmérőjű, gömb alakú esőcseppek lebegnek. Mekkora sebességgel áramlik felfelé az 1 $kg/m^3$ sűrűségű levegő a felhőben? (A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos.)

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

**P. 5243.** Egy sportcsarnokban a kézilabdázók az indítást gyakorolják úgy, hogy a terem falával párhuzamosan futva a falhoz dobott labdát elkapják. Az egyik játékos a faltól 3 méterre, folyamatosan 5 m/s sebességgel szalad. A teremhez képest legalább mekkora sebességgel kell eldobnia a labdát ahhoz, hogy utána épp az eldobás magasságában tudja majd elkapni? A labda ütközését a fallal tekintsük tökéletesen rugalmasnak.

(*5 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

**P. 5244.** Egy bizonyos fajta elemi részecske szilárd anyagban mozogva a megtett úttal arányosan veszít az energiájából, és valahol megáll. A $v_0=10^7$ m/s kezdősebességű részecskék egy ritkább anyagba $s_1=3$ cm, egy sűrűbb anyagba pedig $s_2=2$ cm mélyen hatolnak be. Mekkora út megtétele után állnak meg az ugyanekkora kezdősebességű részecskék, ha a sűrűbb anyag $d=1{,}5$ cm vastag rétegén áthatolva a ritkább anyagba érnek?

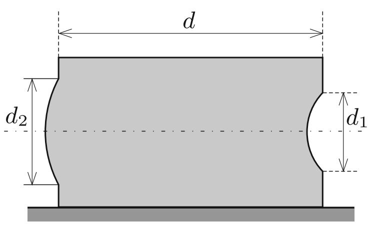
(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

**P. 5245.** Teherszállító repülőgép halad az Egyenlítő felett 11 km magasan 1000 km/h sebességgel, először nyugati, majd keleti irányban. A repülőtéren hitelesített rugós mérleg segítségével mindkét alkalommal megmérik a gépben egy, a fedélzeten lévő nehéz tárgy tömegét. A két mért érték között 1 kg a különbség. Mekkora a tárgy valódi tömege?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

**P. 5246.** Hévízen, a tó aljának azon részén, ahol a tölcsér sziklafalából, a felszín alatt kiömlik a víz a tóba, a felkavart iszaprétegből induló, végig gömb alakúnak feltételezett légbuborék átmérője 50%-kal megnő, miközben az állandó hőmérsékletű víz felszínére érkezik. Mekkora a víz mélysége az iszapréteg felett?

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest




**P. 5247.** Egy téglatest alakú akvárium két szemközti oldalán egy-egy kör alakú nyílás van, melyeket vékony, kis nyílásszögű gömbsüvegek fednek (lásd az *ábrát*). A gömbsüvegek közös optikai tengelye vízszintes. A befelé domboruló gömbsüveg görbületi sugara $r$, a kifelé domborulóé $2r$. A gömbsüvegek teteje alacsonyabban van, mint az akváriumban lévő, $n=4/3$-os törésmutatójú víz felszíne.

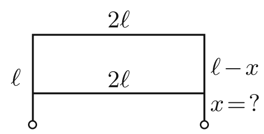
*a*) Mekkora $d$ távolságra van egymástól az akvárium gömbsüvegeket tartalmazó két oldala, ha az egyik gömbsüvegre vízszintesen érkező, párhuzamos fénysugarak a másik gömbsüvegen át vízszintesen, párhuzamosan hagyják el az akváriumot?

*b*) Mekkora a két gömbsüveg $d_2$, illetve $d_1$ átmérőjének aránya, ha az akváriumba bármelyik gömbsüvegen át belépő, vízszintes fénynyaláb teljes egészében a másik gömbsüvegen lép ki?

*c*) Az optikai tengelyen, az akvárium közepén van egy piciny halacska. Hol látható ez az egyik, illetve a másik oldali gömbsüvegen át nézve?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

**P. 5248.** Egy $4\ell$ hosszúságú ellenálláshuzalt a két negyedelőpontjában derékszögben meghajlítottunk. Hol kell ehhez hozzákötni a $2\ell$ hosszúságú, ugyanebből a huzalból levágott vezetőt, ha azt akarjuk, hogy a huzalvégek között kialakuló eredő ellenállás megegyezzen egyetlen $2\ell$ hosszúságú vezető ellenállásával?




(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

**P. 5249.** Az AA jelű akkumulátor hossza 5 cm, átmérője 1,4 cm.

*a*) Mekkora energiát tárol egy 1,2 V-os, 2800 mAh-s akku?

*b*) Mekkora sebességre gyorsulna fel ez a 17 grammos akku, ha az eltárolt energiáját teljesen a saját mozgási energiájává alakítaná?

*c*) Hányszor kevesebb energiával lehetne ugyanekkora térfogatú vizet 20 °C-ról 100 °C-ra melegíteni?

*d*) Mennyi energia van ugyanekkora térfogatú kristálycukorban, amelynek sűrűsége kb. 0,77 g/cm$^3$, energiatartalma pedig 1680 kJ/100 gramm?

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

❄

**Beküldési határidő: 2020. október 15.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 6. September 2020)

## Problems in Mathematics

**New exercises for practice – competition K** (see page 353): **K. 659.** How many different quadrilaterals are there whose vertices are selected from the vertices of a regular nonagon so that the quadrilateral contains the centre of the nonagon in its interior? (Congruent quadrilaterals are not considered different.) **K. 660.** The squares in the *figure* were filled in with the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, and then the sum of the numbers in the two adjacent squares was entered in each circle. Finally, the numbers in a few circles were deleted, and the squares were shaded. *a*) Which numbers are missing from the blank circles? *b*) Enter the original number in each square. **K. 661.** The sides of a regular octagon $ABCDEFGH$ are 2 units long. Two squares, $BCIM$ and $GHNP$ are constructed on sides $BC$ and $GH$, inside the octagon. Show that the points $N$ and $M$ coincide. **K. 662.** The first four terms of a sequence are all 1. From the fifth term onwards, each term is obtained by adding the two terms that are four positions and three positions back from that term. How many even numbers are there among the first 150 terms of the sequence? **K. 663.** The sum of the squares of three consecutive integers equals the sum of the squares of the following two integers. What may be these five consecutive numbers?

**New exercises for practice – competition C** (see page 354): **Exercises up to grade 10: C. 1616.** Solve the equation $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{\frac{5z}{4}+\frac{13}{6v}}}=\frac{135}{113}$ where $x$, $y$, $z$, $v$ are positive integers. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1617.** Is it possible to arrange four $2\times 8$ rectangles in the interior of a $7\times 15$ rectangle as shown in the *figure,* without overlapping? (The figure is not to scale.) **Exercises for everyone: C. 1618.** Prove that $\frac{2}{3}\leqslant a_{n+1}-a_n<1$ holds for all the terms of the sequence $a_n=\frac{(n-1)n}{n+1}$, with $n\geqslant 1$. **C. 1619.** From the midpoint of each side of an acute-angled triangle, drop perpendiculars to the other two sides. Prove that the area of the hexagon formed by the perpendiculars is half the area of the triangle. (*Croatian problem*) **C. 1620.** Jack Russell fashioned a springboard in his back yard. He carried out measurements to determine that by bending the springboard $x$ decimetres below horizontal, he could jump to a height of $0.5x^2+ax+b$ decimetres. Unfortunately, he forgot the values of $a$ and $b$. He only remembers that bending by 10 cm let him jump 35 cm, and a deformation four times as large resulted in a jump four times as high. What may have been Jack's measured values of $a$ and $b$? **Exercises upwards of grade 11: C. 1621.** The lengths of the sides of a trapezoid circumscribed about a circle are integers that are consecutive terms of an arithmetic progression in some order. Given that the radius of the incircle and the length of the shorter base are both 6, how long are the other three sides? (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **C. 1622.** Prove that the area bounded by the graphs of the functions $y=1-|x-1|$ and $y=|2x-a|$ is less than $\frac{1}{3}$ for $1<a<2$. (*Croatian problem*)

**New exercises – competition B** (see page 355): **B. 5110.** The tangents drawn to the inscribed circle of an isosceles triangle, parallel to the sides, cut off three small triangles. Prove that in the small triangles lying on the base of the large triangle, the heights drawn to the base are equal to the radius of the inscribed circle of the large triangle. (*3 points*) **B. 5111.** Let $a$ and $b$ be real numbers such that $a+b=1$ and $a^2+b^2=2$. Find the value of $a^8+b^8$. (*3 points*) (Based on the idea of *M. Szalai,* Szeged) **B. 5112.** A deck of card consists of $p$ red cards and $k$ blue cards. In how many different ways is it possible to select some of the cards so that the number of red cards should be $n$ more than the number of blue cards? (*4 points*) **B. 5113.** Let $a$, $b$ and $c$ denote some given, pairwise relatively prime positive integers. Prove that the equation $x^a+y^b=z^c$ has infinitely many solutions $(x,y,z)$ where $x$, $y$ and $z$ are positive integers. (*5 points*) **B. 5114.** A unit cube $ABCDEFGH$ (see the *figure*) is cut by a plane $\mathcal{S}$ that intersects the edges $AB$ and $AD$ at the points $P$ and $Q$ respectively, such that $AP=AQ=x$ $(0<x<1)$. Let the common point of the edge $BF$ and $\mathcal{S}$ be $R$. What is the distance $BR$ if $\angle QPR=120^\circ$? (*4 points*) **B. 5115.** Ali has $n$ coins in his purse, and Baba has $n-1$ purses, initially all empty. Baba is playing the following game: he divides the coins (all in the same purse at start) into two purses, with $a_1$ coins in one of them and $b_1$ coins in the other $(a_1,b_1>0)$, and then he writes the product $a_1b_1$ on a blackboard. Then he continues in the same way: in the $k$th move $(k=2,3,\ldots)$ he selects a purse containing at least two coins, divides them between two empty purses, with $a_k$ coins in one of them and $b_k$ in the other $(a_k,b_k>0)$, and writes the product $a_kb_k$ on the board. The game terminates when there is 1 coin in each purse. Then Ali gives as many coins to Baba as the sum of all the products $a_kb_k$ on the board. What is the maximum number of coins that Baba may get? (*5 points*) **B. 5116.** Let $a, b, c > 0$ and $x, y, z \geqslant 0$. Prove that if $x + aby \leqslant a(y + z)$, $y + bcz \leqslant b(z + x)$, and $z + cax \leqslant c(x + y)$, then $x = y = z = 0$ or $a = b = c = 1$. (*6 points*) (Proposed by *G. Stoica,* Saint John, Kanada) **B. 5117.** The points $A$, $B$, $C$, $D$ (in this order) lie on the same line. On the same side of the line, a regular triangle is drawn on each of the line segments $AB$, $BC$ and $CD$, with the third vertices being $E$, $F$, and $G$, respectively. Let the distances between the adjacent points on the line be $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Show that the measure of $\angle EFG$ equals $120^\circ$ if and only if $a + c = b$ or $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$. (*6 points*)

**New problems – competition A** (see page 356): **A. 780.** We colored the $n^2$ unit squares of an $n \times n$ square lattice such that in each $2 \times 2$ part at least two of the four unit squares has the same color. What is the largest number of colors we could have used? (Based on a problem of the *Dürer Competition*) **A. 781.** We want to construct an isosceles triangle using a compass and a straightedge. We are given two of the following four data: the length of the base of the triangle ($a$), the length of the leg of the triangle ($b$), the radius of the inscribed circle ($r$) and the radius of the circumscribed circle ($R$). In which of the six possible cases will we definitely be able to construct the triangle? (Proposed by *György Rubóczky,* Budapest) **A. 782.** Prove that the edges of a simple planar graph can always be oriented such that the outdegree of all vertices is at most three. (*UK competition problem*)

## Problems in Physics

(see page 378)

**M. 397.** By measuring the temperature of a smoked metal plate (which was smoked with the flames of a candle) determine the amount of energy absorbed by a unit area surface perpendicular to the radiation emitted by the Sun in a unit of time. (Take the specific heat capacity of the metal from a table.)

**G. 713.** An 80-kg physics teacher makes a first class lever from a 6-m long strong wooden plank of mass 40 kg, with which he demonstrates to his students that he can lift a load of mass even up to 500 kg. Where should he place the fulcrum of the lever if he wants to lift the load up to the highest possible position such that he gently puts his total weight onto the other end of the plank? The vertical line through the centre of mass of the load is at a distance of 20 cm from the end of the plank. **G. 714.** The Earth's ice caps and glaciers currently contain approximately 30 000 000 km$^3$ of ice. Let us estimate how much the sea level of the oceans and seas would rise if all this huge amount of ice melted. **G. 715.** A circuit consists of three resistors and a battery as shown in the *figure.* *a*) What is the current flowing through each resistor and the voltage across them? *b*) How do these values change if we connect a lot of ("infinitely many") 1 kΩ resistors in parallel to the two resistors, already connected in parallel? *c*) What will the currents through the original three resistors and voltages across them be, if we connect a lot of ("infinitely many") 1 kΩ resistors in series with the 5 kΩ resistor? **G. 716.** A grenade fired from a cannon explodes into two pieces of equal mass at the top of its trajectory, when its speed is 100 m/s. One piece starts to move vertically upwards at a speed of 50 m/s. In what direction and at what speed does the other piece start? (The mass of the explosive in the grenade is negligible.)

**P. 5240.** How many litres of air is displaced from a room of sides 6 m × 5 m × 3 m, if the temperature of the air increases from 27 °C to 30 °C, while the pressure decreases by 0.5%? **P. 5241.** On May 14, 1962, due to the strong South West wind the water level of lake Balaton near city Keszthely decreased by 45 cm in 9 hours, while near the village

Alsóörs the water level increased by 51 cm. Estimate the order of the power required of the wind to raise the level of water. (It is allowed to use relevant data found in the internet.) **P. 5242.** Spherical raindrops of diameter 2 mm are floating in a cloud. At what speed does the air of density 1 kg/m$^3$ flow upwards in the cloud? (Air drag is proportional to the square of the speed.) **P. 5243.** In a sports hall, handball players practice starting by running parallel to the wall of the room to catch a ball thrown against the wall. One of the players runs 3 meters from the wall at a constant speed of 5 m/s. At least at what speed with respect to the hall does he or she have to throw the ball in order to catch it at the height of the throw? Consider the collision of the ball with the wall to be perfectly elastic. **P. 5244.** The energy dissipated by a specific type of elementary particle while it is moving in some solid is proportional to the distance covered by the particle, and finally it stops somewhere. Particles with an initial speed of $v_0 = 10^7$ m/s penetrate into some lighter material to a depth of $s_1 = 3$ cm, whereas they penetrate into some more dense material to a depth of $s_2 = 2$ cm. At what depth can these particles, with the same initial speed, go into the lighter material after passing through a $d = 1.5$ cm thick layer of the more dense material? **P. 5245.** A cargo plane travels 11 km above the equator at a speed of 1000 km/h, first west and then east. The mass of a heavy object on board is measured on both occasions using a spring balance certified at the airport. The difference between the two measured values is 1 kg. What is the mass of the object in reality? **P. 5246.** At the bottom of lake Hévíz, where the spring breaks out from the rock, a spherical bubble is generated from the mud. The bubble is supposed to keep its spherical shape and its diameter increases by 50% while it moves up to the surface of the water. The temperature of the water is the same everywhere. What is the depth of the water above the mud layer? **P. 5247.** On each of the opposite faces of a rectangular aquarium there is a circular hole covered by a thin spherical cap-shaped piece of glass, as shown in the *figure.* The common principal axis of the caps is horizontal. The radius of curvature of the concave cap – the one depressed into the aquarium – is $r$, and that of the convex cap – bulging outward from the aquarium – is $2r$. The topmost points of both caps are below the surface of the water in the aquarium. The refractive index of water is $n = 4/3$. (The angle between the principal axis of the spherical glass cap, and the radius drawn from the centre of the sphere to a point on the perimeter of the circular base of the cap is small.) *a*) What is the distance between the two faces of the aquarium, containing the glass caps, if a parallel beam of light entering horizontally to one of the spherical caps emerges from the other glass cap as a parallel and horizontal beam of light? *b*) What is the ratio of the diameters of the two spherical caps $d_2$ to $d_1$, if a horizontal light beam entering the aquarium through any of the spherical caps exits entirely through the other spherical glass cap? *c*) There is a tiny fish at the common principal axis in the middle of the aquarium. Where can this fish be observed, when viewed through one of the glass caps on one side, then through the other? **P. 5248.** A wire of length $4\ell$ was bent at right angles at its two quadrisecting points, next to the ends of the wire. Where should another piece of $2\ell$-long wire of the same type be connected to the first wire, if the equivalent resistance of the wire system is to be the same as the resistance of the wire of length $2\ell$? **P. 5249.** The length of an AA rechargeable battery is 5 cm, and its diameter is 1.4 cm. *a*) How much energy is stored in the battery rated at 1.2 V and 2800 mAh? *b*) To what speed could such a battery speed up, if all of its stored energy was converted to its kinetic energy? The mass of the battery is 17 g. *c*) By what factor would the energy needed to heat the same volume of water from 20 °C to 100 °C be less than the above calculated energy? *d*) How much energy is there in the same volume of granulated sugar of density of approximately 0.77 g/cm$^3$? The energy content of sugar is 1680 kJ/100 grams.